*Ни одна наука так не укрепляет веру в силу человеческого разума, как математика.*

Польский ученый, математик  Гуго Штейнгауз

**Неравенство Коши**

    К числу наиболее часто встречающихся в математике числовых неравенств относится неравенство: «среднее арифметическое двух или более неотрицательных чисел больше или равно их среднему геометрическому». Такое неравенство носит имя французского математика и механика Огюстена Луи Коши (1789 – 1857).

    Неравенство Коши применяется во многих разделах школьной математики. Особенно эффективно его применение при доказательстве неравенств и при решении некоторых уравнений повышенной сложности.

Основные определения

В школьной математике числовое неравенство Коши обычно используется в упрощенной формулировке:  если    и  , то

.               (1)

Доказательство: так как и , то выражение  имеет смысл  и  ,  ,  .

Следует заметить, что неравенство (1) обращается в равенство тогда и только тогда, когда  . Это замечание особенно важно использовать при решении уравнений.

Если в неравенстве (1) положить    и  , где  , то получим неравенство

.               (2)

Здесь равенство достигается в том и только в том случае, когда  .

Если обе части неравенства (2) умножить на  , то неравенство (2) примет вид

,               (3)

где  . Равенство в (3) имеет место тогда и только тогда, когда  .

В общей форме неравенство Коши формулируется следующим образом:  если  ,  то

,               (4)

где .  Причем неравенство (4) превращается в равенство тогда и только тогда, когда .

Неравенство (4) можно вывести различными способами. Например, в учебном пособии автора «Математика для старшеклассников: задачи повышенной сложности» (М.: КД «Либроком» / URSS, 2017) приведено доказательство неравенства (4) методом математической индукции.

    Рассмотрим применение неравенства Коши при доказательстве неравенств и при решении уравнений повышенной сложности.

Доказательство неравенств

Пример 1. Доказать неравенство

 ,               (5)

где    и  .

Доказательство. Принимая во внимание формулу (1) можно записать

,    и  .

В таком случае

.

Неравенство (5) доказано.

Пример 2. Доказать неравенство

,               (6)

где    и  .

Доказательство.  Согласно неравенству (1) имеем

,       и  .

Неравенство (6) доказано.

Примечание. Имеет место неравенство, которое обобщает неравенство (6). Это неравенство имеет вид

,

где     и  .

Пример 3. Доказать неравенство

,               (7)

где    и  .

Доказательство.  При доказательстве неравенства (7) будем дважды использовать формулу (4), в которой  .

Так как  , то имеет место

  и  .

Отсюда следует, что

.

Неравенство (7) доказано.

Примечание. Так как  , то неравенство (7) равносильно неравенству    при условии, что  и  .

Пример 4. Доказать неравенство

,               (8)

где     и  .

Доказательство. Применяя неравенство (4), где  , получаем

.

Так как  , то отсюда следует

.

Неравенство (8) доказано.

Пример 5. Доказать неравенство

,               (9)

где  .

Доказательство. Используя неравенства (1) и (4) в случае, когда  , получаем

  и   .

Если сложить полученные выше неравенства, то получим требуемое неравенство (9).

Пример 6. Доказать неравенство

,               (10)

где   .

Доказательство.  Согласно неравенству Коши (4), можно записать

,  ,  и.

Для завершения доказательства необходимо сложить все приведенные выше неравенства. Неравенство (10) доказано.

Пример 7. Доказать неравенство

,               (11)

 где  .

Доказательство.  Согласно неравенству (1) имеем

, ,    и  .

Отсюда вытекает неравенство (11).

Решение уравнений

Пример 8. Решить уравнение

 .               (12)

Решение. Из уравнения (12) следует, что  . Представим уравнение (12) в виде равносильного уравнения

.               (13)

Если к левой части уравнения (13) применить неравенство (1), то получим

.

Отсюда и из уравнения (13) следует, что примененное неравенство Коши превратилось в равенство. Следовательно, имеем

,    или  .

Корнями квадратного уравнения являются    и  .

Ответ:  , .

Пример 9. Решить уравнение

.               (14)

Решение. Из уравнения (14) следует, что   и  . Далее воспользуемся (дважды) неравенством (1) и получим

   и   .

Следовательно, имеем неравенства   ,    и  .

Отсюда и из уравнения (14) следует, что примененное (дважды) неравенства (1) превращается в равенства. А это означает, что    и  , т.е.    и  .

Для завершения решения уравнения (14) необходимо подставить значения    и    в данное уравнение.

Ответ:  ,  .

Пример 10. Решить уравнение

 .               (15)

Решение.  Из уравнения (15) следует, что . Оценим снизу левую часть уравнения (15), используя для этого неравенство (2), следующим образом:   .

Так как  , то равенство в уравнении (15) возможно только в том случае, когда обе его части одновременно равны двум. Поэтому корнями уравнения (15) являются    и  .

Ответ:  , .

Пример 11. Решить уравнение

.               (16)

Решение.  Принимая во внимание неравенство (1), можно записать

,.

Если сложить записанные выше неравенства, то получим

.

Отсюда и из уравнения (16) следует, что

,  ,    или  .

Подставим значение    в уравнение (16) и убедимся, что это значение является его корнем.

Ответ:  .

Пример 12. Решить уравнение

,              (17)

где  

Решение. С учетом того, что  , применим к левой части уравнения (17) неравенства (1), (4) и получим

,,.

Так как неравенство Коши дважды превратилось в равенство, то  и  . Отсюда получаем   и.

Проверка подтверждает, что найденные значения    и    являются корнями уравнения (17).

Ответ:  , .

Пример 13. Решить систему уравнений

               (18)

где  ,  ,  .

Решение.  Первоначально умножим второе уравнение системы (18) на четыре и получим равносильную систему

               (19)

Если затем сложить уравнения системы (19), то

  или

.               (20)

Так как ,    и   , то согласно неравенству (2) имеем

,    ,     и поэтому

.

Отсюда и из уравнения (20) следует, что  ,  ,    или  , , .

В заключение решения системы уравнений (18) необходимо выполнить проверку.

Ответ: , , .

Пример 14. Решить систему уравнений

               (21)

где    и  .

Решение. Так как   и , то к левой части первого уравнения системы (21) можно применить неравенство Коши (4), где  .

Имеет место  .

Отсюда и из первого уравнения системы следует, что примененное неравенство (4) превратилось в равенство. А это означает, что выполняется условие или .

Подставим    во второе уравнение системы (21)  и получим  или  . Так как    и  , то    и  .

Ответ:  , .

Рекомендуемая литература

1.  Кушнир А.И. Шедевры школьной математики (задачи и решения в двух книгах). – Киев: Астарта, книга 1, 1995. – 576 с.

2. Супрун В.П. Математика для старшеклассников: задачи повышенной сложности. – М.: КД «Либроком» / URSS, 2017. – 200 с.

3. Супрун В.П. Математика для старшеклассников: нестандартные методы решения задач. – М.: КД «Либроком» / URSS, 2017.

– 296 с.