Задача 1

В классе 30 человек. Саша Иванов в диктанте сделал 13 ошибок, а остальные – меньше. Докажите, что по крайней мере 3 ученика сделали ошибок поровну (работа может быть и безошибочной).

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |

Решение.
Предположим, что никакие 3 ученика не сделали одинаковое число ошибок, т.е. в каждую клетку от 0 до 12 попало меньше трех школьников. Тогда в классе не больше 2\*13+1=27, а в классе 30 учеников. Значит, наше предположение неверно. Поэтому найдутся три ученика, сделавшие одинаковое число ошибок.
Задача 2
В Москве живет около 8,3 млн. человек на голове у каждого не более 100 000 волос. Докажите, что в Москве есть по крайней мере 80 человек с одинаковым числом волос на голове.
Решение.
Пусть в наших клетках – люди с одинаковым числом волос на голове: 0 волос, с 1 волосом, с двумя и т.д. до 100 000 волос. Всего у нас 100 001 клетка. И пусть в каждой клетке не более 80 человек. Тогда население Москвы не более 80\*100 001= 8 000 080, а всего 8 300 000 человек. Значит, наше предположение неверно.
Задача 3
Пусть в классе 41 человек. Маша Петрова сделала больше всех ошибок – 13. Докажите, что найдутся четверо учащихся, сделавших одинаковое число ошибок. Безошибочных работ не было.
Решение.
Клетки 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13- число ошибок.
Предположим, что только трое сделали одинаковое число ошибок. Тогда в классе не больше, чем 3\*13=39 человек, а их 41. Значит, найдутся четверо, которые сделали одинаковое число ошибок.

Задача 4
В хвойном лесу 800 000 елей, и ни на одной из них не более 500 000 игл. Докажите, что по крайней мере у двух елей число игл одинаковое.
Решение
Пусть в одну клетку попали ели с одинаковым числом иголок 0; 1; 2; … 500 000. Если в каждой клетке по одной ели, то их 1\*500 000=500 000, а в лесу – 800 000. Значит, хотя бы у двух елей число игл одинаковое.

Задача 5
В городе 15 школ. В них обучается 6015 школьников. В концертном зале городского Дворца культуры 400 мест. Докажите, что найдется школа, ученики которой не поместятся в этом зале.

Решение.
Предположим, что в каждой школе не более 400 учеников. Значит, в 15 школах не более 15\*400=6000 школьников. Но, по условию, в школах обучается 6015 человек. Значит, найдется школа, в которой больше 400 учеников. Поэтому ученики этой школы не поместятся в зале на 400 мест.
Задача 6.
20 учеников (больше половины из них – девочки) сидят за круглым столом. Докажите, что какие-то две девочки сидят напротив друг друга.
Решение.
Образуем 10 пар из учеников, сидящих напротив друг друга. Так как девочек больше половины, то есть больше 10, то найдется пара, состоящая из двух девочек.
Задача 7.
15 девочек собрали 100 орехов. Докажите, что какие-то две из них собрали одинаковое
количество орехов.
Решение.
Пусть все девочки собрали разное количество орехов: 1; 2; 3; …; 15. Тогда суммарное количество собранных орехов равно (1+ 15)/ 2\*15= 120>100. Значит, какие-то две девочки собрали одинаковое количество орехов.

Задача 8
На далекой планете, имеющей форму шара, суша занимает больше половины поверхности планеты. Докажите, что можно прорыть туннель, проходящий через центр планеты, который соединит сушу с сушей.
Решение.
Покрасим сушу на планете в зеленый цвет, а поверхность планеты, симметричную суше,- в синий. Так как суша занимает больше половины поверхности планеты, то найдется точка на планете, покрашенная в оба цвета. Через нее и надо рыть туннель.

Задача 9
В походе участвовало 25 человек, каждому из которых было от 24 до 30 полных лет (на данный день) Докажите, что найдутся четыре человека, родившихся в один год.
Решение.
Различных годов рождения может быть 7. Предположим, что каждый год родилось не более трех участников похода. Значит, за 7 лет могли родиться не более 3\*7=21 участника. Но, по условию, в походе участвовало 25 человек. Получили противоречие. Значит, найдутся четыре участника похода, родившихся в один год.

Задача 10
На шахматной доске 8 \* 8 отмечены центры всех полей. Можно ли 13 прямыми разбить доску на части так, чтобы в каждой части было не более одной отмеченной точки?

Решение.
Рассмотрим внешний ряд клеток доски (по периметру). Центры полей образуют квадрат 7 \* 7, между ними 28 промежутков. Мы должны разбить доску так, чтобы все отмеченные точки попали в разные части. Значит, прямые должны пересекать все промежутки между клетками. Но прямая может пересечь стороны квадрата не более чем в двух точках (случай противоположных по диагонали вершин квадрата нужно исключить), значит, нужно не менее 14 прямых.

Задача 11
Внутри равностороннего треугольника со стороной 10 отмечено пять точек. Докажите, что найдутся две из них, расстояние между которыми будет не более 5.
Решение.
Разделим треугольник на 4 равных равносторонних треугольника. Длина их стороны равна 5, значит, расстояние между любыми двумя точками маленького треугольника не более 5. Точек 5, треугольников 4, значит, хотя бы 2 точки попадут в один треугольник. И расстояние между ними будет не более пяти.

Задача 12
Плоскость раскрашена в два цвета. Докажите, что найдутся две точки одного цвета на расстоянии 1 метр друг от друга.
Решение.
Рассмотрим вершины равностороннего треугольника со стороной 1 метр. Если две точки разного цвета, то третья обязательно либо первого, либо второго цвета, значит, мы нашли две точки одного цвета.

Задача 13
В магазин привезли 25 ящиков конфет трех разных сортов (в каждом ящике – только один сорт). Докажите, что есть хотя бы 9 ящиков с одним и тем же сортом конфет.

Решение.
Если бы ящиков с конфетами каждого из трех сортов привезли не более 8, то всего привезли бы не более 24-х ящиков, что противоречит условию. Значит, найдутся 9 ящиков с одинаковым сортом конфет.

Задача 14
Какое максимальное количество ладей можно расставить на шахматной доске так, чтобы они не били друг друга?

Решение.
Каждая ладья бьет горизонталь и вертикаль, на пересечении которых стоит. Значит, на каждой горизонтали можно поставить не более одной ладьи, всего ладей будет не более восьми. Для 8 ладей можно придумать много вариантов расстановок, например, по диагонали.

Задача 15
На окно размером 40 см \* 30 см село 25 мух. Докажите, что квадратной мухобойкой 11 см \* 11 см можно прихлопнуть сразу трех мух.
Решение.
Разделим окно на 12 квадратов размером 10 см \* 10 см. Если в каждом квадрате не более двух мух, то всего на окне не более 2 \* 12 = 24 мух, а по условию мух 25, значит, в каком - то квадрате сидит хотя бы 3 мухи. Мухобойка закроет этот квадрат. Значит, такой мухобойкой можно прихлопнуть сразу трех мух.

Задача 16
В коробке лежат карандаши: 4 красных и 3 синих. В темноте берут карандаши. Сколько надо взять карандашей, чтобы среди них было не менее одного синего?
Ответ: 5 карандашей.

Задача 17
У мальчика 9 медных монет. Докажите, что у него есть хотя бы три монеты одинакового достоинства.
Решение.
Всего различных медных монет 4. Пусть мальчик имеет набор по 2 монеты каждого вида, всего будет 8 монет. Оставшаяся монета из 9 имеющихся, будет третьей монетой одного из видов. Значит, у мальчика есть хотя бы 3 монеты одинакового достоинства.

Задача 18
Какое наименьшее количество любых натуральных чисел следует взять, чтобы среди них всегда нашлась такая пара чисел, разность которых делилась бы на 5?
Решение.
Разобьем множество натуральных чисел на 5 классов: к первому классу отнесем все числа, которые при делении на 5 дают остаток, равный 0, ко второму классу – остаток, равный 1, к третьему классу - остаток, равный 2, к четвертому классу – остаток, равный 3, к пятому – остаток, равный 4. Очевидно, что разность двух чисел, принадлежащих разным классам, на 5 не делится. Если же взять шесть чисел, то среди них обязательно найдутся два числа, принадлежащие одному и тому же классу, и разность этих чисел делится на 5.

Итак, наименьшее количество натуральных чисел, которое следует взять, равно 6.

Задача 19
В классе 41 ученик написал по три контрольные работы. В результате учитель не поставил ни одной неудовлетворительной отметки, и каждый ученик получил все остальные отметки. Узнав об этом, один ученик заметил, что по крайней мере 7 человек получили одинаковые отметки по всем трем контрольным, а другой, подумав, сказал, что таких учеников с одинаковыми отметками, наверно будет 8. Кто из них прав?

Решение.
Разобьем класс на группы в соответствии со всевозможными наборами отметок: 3, 4, 5; 3, 5, 4; 4, 3, 5; 4, 5, 3; 5, 4,3; 5, 3, 4 (всего 6 групп). Если в каждой из этих групп не больше 6 человек, то всего в классе не больше 36 человек, что противоречит условию. Следовательно, по крайней мере в одной из этих групп не меньше 7 человек. Возможен, однако, и случай, когда в каждой группе не больше 7 человек (например, в одной группе 6, а в остальных – по 7 человек), и, следовательно, утверждение второго ученика может быть не верным.
Итак, прав только первый ученик.
Ответ: первый ученик

Задача 20
В школе 370 учеников. Найдутся ли в этой школе хотя бы два ученика, у которых день рождения приходится на одну и ту же дату календаря?
Ответ: да

Задача 21
У каждого из пяти мальчиков было не меньше одного шара, а всего у них было 7 шаров. Мог ли кто- либо из них иметь: а) 3 шара? б) 4 шара?
Ответ: а) да; б) нет