

# **МАТЕМАТИКА**

---

## **в схемах и таблицах**

# Алгебра

## Линейные уравнения

|                                                   |                                                       |
|---------------------------------------------------|-------------------------------------------------------|
| $ax=b$ , где $a, b$ – числа,<br>$x$ – неизвестное | если $a \neq 0$ , то $x = \frac{b}{a}$ – один корень  |
|                                                   | если $a = 0, b \neq 0$ , то корней нет                |
|                                                   | если $a = 0, b = 0$ , то корней бесконечное множество |

### Способы разложения на множители

1. Вынесение общего множителя за скобки  $2ab^2-4a^2c=2a \cdot (b^2-2ac)$
2. Способ группировки  $\underline{3a+6b}-\underline{a^2-2ab}=3 \cdot (a+2b)-a(a+2b)=(a+2b)(3-a)$
3. Формулы сокращенного умножения:

| Формулы                                      | Примеры                                                                       |
|----------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------|
| 1. $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$                      | $9-x^4=3^2-(x^2)^2=(3-x^2)(3+x^2); (2n-5)(5+2n)=(2n)^2-5^2=4n^2-25$           |
| 2. $(a \pm b)^2=a^2 \pm 2ab+b^2$             | $(4+3z)^2=16+24z+9z^2$<br>$25-10y+y^2=5^2-2 \cdot 5 \cdot y+y^2=(5-y)^2$      |
| 3. $a^3 \pm b^3=(a \pm b)(a^2 \mp ab+b^2)$   | $27-a^6=3^3-(a^2)^3=(3-a^2)(9-3a^2+a^4)$<br>$(4+x)(16-4x+x^2)=4^3+x^3=64+x^3$ |
| 4. $(a \pm b)^3=a^3 \pm 3a^2b+3ab^2 \pm b^3$ | $(2-n)^3=8-12n+6n^2-n^3$<br>$343+21x^{10}+147x^5+x^{15}=(7+x^5)^3$            |

## Действия с алгебраическими дробями

Основное свойство дроби:  $\frac{a}{b} = \frac{a \cdot m}{b \cdot m}, b \neq 0, m \neq 0$

|                                                                       |                                                                                 |
|-----------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------|
| 1. $\frac{a}{m} + \frac{b}{m} = \frac{a+b}{m}$                        | $\frac{x}{y+1} + \frac{2}{y+1} = \frac{x+2}{y+1}$                               |
| 2. $\frac{a}{m} \pm \frac{b}{m} = \frac{a \pm b}{m}$                  | $\frac{3}{1+x^3} - \frac{x}{1-x^3} = \frac{3-x}{1-x^3}$                         |
| 3. $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$      | $\frac{x}{4} \cdot \frac{8}{(x-1)} = \frac{8x}{4 \cdot (x-1)} = \frac{2x}{x-1}$ |
| 4. $\frac{a}{m} + \frac{b}{n} = \frac{a \cdot n + b \cdot m}{mn}$     | $\frac{3a}{b} + \frac{7n^2}{a} = \frac{3a^2 + 7bn^2}{ab}$                       |
| 5. $\frac{a}{m} \pm \frac{b}{n} = \frac{a \cdot n \pm b \cdot m}{mn}$ | $\frac{5 \pm x}{3} \pm \frac{x}{2y} = \frac{2y(5 \pm x) \pm 3x}{6y}$            |

## Функция

Переменная величина  $y$  называется **функцией** переменной величины  $x$ , если каждому значению переменной  $x$  соответствует единственное значение переменной  $y$ .

$y=f(x)$ ,  $y$  – функция, **зависимая переменная**,  $x$  – аргумент, **независимая переменная**.

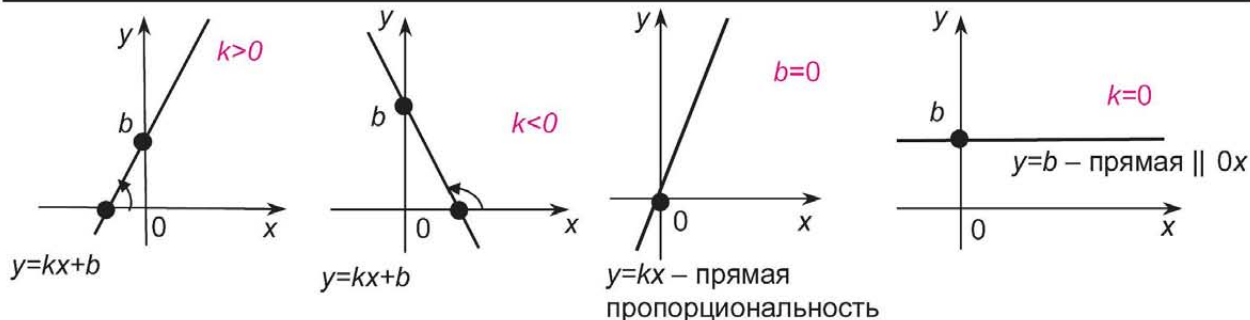
**Область определения функции** – множество значений  $x$ , для которых функция определена. Обозначается:  $a(f)$ .

**Область значений функции** – множество значений  $y$ , которые она принимает на всей области определения. Обозначается:  $b(f)$ .

## Линейная функция

Функция вида  $y=kx+b$ , где  $k, b$  – числа, называется **линейной функцией**.

Графиком линейной функции является прямая,  $k$  – угловой коэффициент, если  $k>0$ , то угол наклона прямой – острый, если  $k<0$ , то угол наклона прямой – тупой,  $b$  – показывает, в какой точке график пересекает ось ординат.



### Исследование линейной функции $y=kx+b$ ; $k \neq 0, b \neq 0$

|                                                                |                                                                                                                                                                                                                                            |
|----------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1. О.О.Ф. $x \in \mathbb{R}$                                   |                                                                                                                                                                                                                                            |
| 2. О.З.Ф. $y \in \mathbb{R}$                                   |                                                                                                                                                                                                                                            |
| 3. Нули функции $kx+b=0$ ; $x = -\frac{b}{k}$                  | точка пересечения графика функции с осью абсцисс                                                                                                                                                                                           |
| 4. Знакопостоянство:<br>если $k>0$ , то<br><br>если $k<0$ , то | $y>0$ , если $x \in \left(-\frac{b}{k}; +\infty\right)$ ; $y<0$ , если $x \in \left(-\infty; -\frac{b}{k}\right)$<br><br>$y>0$ , если $x \in \left(-\infty; -\frac{b}{k}\right)$ ; $y<0$ , если $x \in \left(-\frac{b}{k}; +\infty\right)$ |
| 5. Монотонность:                                               | если $k>0$ , то $y \uparrow$ , при $x \in \mathbb{R}$ ; если $k<0$ , то $y \downarrow$ , при $x \in \mathbb{R}$ .                                                                                                                          |

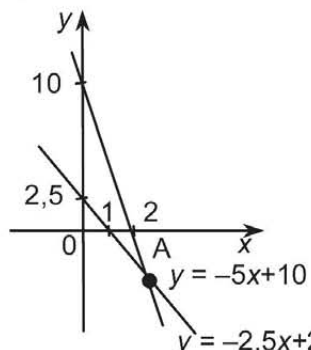


## Системы линейных уравнений

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}; a_{1,2}; b_{1,2}; c_{1,2} - \text{числа}; x, y - \text{неизвестные}$$

Решить систему уравнений – значит найти все пары чисел  $(x, y)$ , являющиеся решением, или установить, что их нет.

## Способы решения систем уравнений

| Способ<br>подстановки                                                                                                                                                                                                                    | Способ<br>сложения                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | Графический<br>способ                                                                                                                                                                                                               |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + 3y = 5 \end{cases}$ $\begin{cases} y = 2x \pm 3 \\ x + 3(2x \pm 3) = 5 \end{cases}$ $\begin{cases} y = 2x \pm 3 \\ 7x = 14 \end{cases}$ $\begin{cases} y = 1 \\ x = 2 \end{cases}$ <p>Ответ: (2; 1)</p> | $\begin{cases} 2x - 5y = 3 \\ 3x + y = -4 \quad   \cdot 5 \end{cases}$ $+ \begin{cases} 2x \pm 5y = 3 \\ 15x + 5y = \pm 20 \end{cases}$ $\begin{cases} 17x = \pm 17 \\ 3x + y = \pm 4 \end{cases}$ $\begin{cases} x = \pm 1 \\ y = \pm 3x \pm 4 \end{cases}$ $\begin{cases} x = \pm 1 \\ y = \pm 1 \end{cases}$ <p>Ответ: (-1; -1).</p> | $\begin{cases} 5x + y = 10 \\ 5x + 2y = 5 \end{cases}$ $\begin{cases} y = \pm 5x + 10 \\ y = \pm 2,5x + 2,5 \end{cases}$  <p>Ответ: (3; -5)</p> |

|                                                                                                                                                                                |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Пусть прямые $l_1$ и $l_2$ заданы уравнениями $l_1: y=k_1x+b_1$ и $l_2: y=k_2x+b_2$ .                                                                                          |
| если $k_1=k_2$ , $b_1 \neq b_2$ , то $l_1 \parallel l_2$ и система $\begin{cases} y = k_1x + b_1 \\ y = k_2x + b_2 \end{cases}$ решения не имеет                               |
| если $k_1 \neq k_2$ , $b_1, b_2$ – любые, то $l_1 \cap l_2$ и система $\begin{cases} y = k_1x + b_1 \\ y = k_2x + b_2 \end{cases}$ имеет одно решение                          |
| если $\frac{k_1}{k_2} = \frac{b_1}{b_2}$ , то $l_1, l_2$ совпадают и система $\begin{cases} y = k_1x + b_1 \\ y = k_2x + b_2 \end{cases}$ имеет бесконечное множество решений. |

### Универсальные обозначения

|          |                                                                                                                                                                             |
|----------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>N</b> | множество натуральных чисел. Натуральными числами называются числа, употребляемые при счете. Самое маленькое натуральное число 1.<br>1; 2; 3; 4; ...; 1000; 1001; 1002; ... |
| <b>Z</b> | множество целых чисел. Целыми числами называются натуральные числа, им противоположные числа и ноль. 0; $\pm 1$ ; $\pm 2$ ; $\pm 3$ ; ...                                   |
| <b>Q</b> | множество рациональных чисел. Рациональными числами называются числа, которые можно представить в виде дроби $\frac{m}{n}$ , где $m \in Z$ , $n \in Z$ .                    |
|          | иррациональными числами называются бесконечные десятичные непериодические дроби                                                                                             |
| <b>R</b> | множество действительных чисел. Действительные числа – множество рациональных и иррациональных чисел                                                                        |

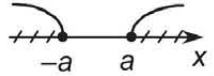
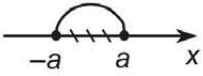
## Модуль числа

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geq 0 \\ -a, & \text{если } a < 0 \end{cases}$$

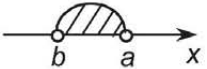
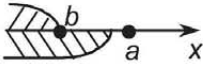
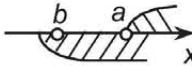
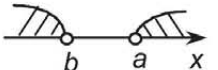
### Уравнение $|x|=a$

|              |                                 |
|--------------|---------------------------------|
| если $a > 0$ | $x_1 = a, x_2 = -a$ – два корня |
| если $a = 0$ | $x = 0$ – один корень           |
| если $a < 0$ | то корней нет                   |

## Неравенства

| $ x  \geq a$                                                                                                                                                                                  | $ x  \leq a$                                                                                                                                                            |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| если $a > 0$ , то $\begin{cases} x \geq a \\ x \leq -a \end{cases}$  $x \in (-\infty; -a] \cup [a; +\infty)$ | если $a > 0$ , то $\begin{cases} x \leq a \\ x \geq -a \end{cases}$  $x \in [-a, a]$ |
| если $a = 0$ , то $x = 0$                                                                                                                                                                     | если $a = 0$ , то $x = 0$                                                                                                                                               |
| если $a < 0$ , то $x \in \mathbb{R}$                                                                                                                                                          | если $a < 0$ , то решения нет                                                                                                                                           |

## Системы линейных неравенств

|                                                  |                   |                                                                                    |                |              |
|--------------------------------------------------|-------------------|------------------------------------------------------------------------------------|----------------|--------------|
| $\begin{cases} x \leq a \\ x > b \end{cases}$    | $b < x \leq a$    |   | $(b; a]$       | полуинтервал |
| $\begin{cases} x < a \\ x > b \end{cases}$       | $b < x < a$       |   | $(b; a)$       | интервал     |
| $\begin{cases} x \geq b \\ x \leq a \end{cases}$ | $b \leq x \leq a$ |   | $[b; a]$       | отрезок      |
| $\begin{cases} x \leq a \\ x \leq b \end{cases}$ |                   |   | $(-\infty; b]$ | луч          |
| $\begin{cases} x > a \\ x > b \end{cases}$       |                   |   | $(a; +\infty)$ | интервал     |
| $\begin{cases} x < a \\ x > b \end{cases}$       |                   |  | нет решения    |              |

## Степень числа

Степенью числа  $a$  с натуральным показателем  $n$ , больше 1, называется произведение  $n$  множителей, каждый из которых равен  $a$ .

$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n$ ,  $a$  – основание степени,  $n$  – показатель степени.

| Свойства степени                                  | Примеры                                               |
|---------------------------------------------------|-------------------------------------------------------|
| 1. $a^1 = a$                                      | $17^1 = 17; \left(\frac{2}{3}\right)^1 = \frac{2}{3}$ |
| 2. $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$                      | $5^2 \cdot 5^6 = 5^8$                                 |
| 3. $a^n : a^m = a^{n-m}$                          | $3^{17} : 3^{15} = 3^2$                               |
| 4. $(a^n)^m = a^{nm}$                             | $(2^7)^3 = 2^{21}$                                    |
| 5. $(ab)^n = a^n b^n$                             | $6^2 = (2 \cdot 3)^2 = 2^2 \cdot 3^2$                 |
| 6. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ | $\left(\frac{2}{7}\right)^3 = \frac{2^3}{7^3}$        |

| С целым показателем                                          | Степень с рациональным показателем                                                          |
|--------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------|
| $a^n, n \in \mathbb{Z}, a \neq 0$                            | $a^p, p \in \mathbb{R}, a \geq 0, p = \frac{m}{n}$ где $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$ |
| $a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$        | $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, a > 0$                                                    |
| $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$ | $a^{\frac{m}{n}} = 0$ , если $a=0, \frac{m}{n} > 0$                                         |

## Арифметический квадратный корень

Арифметическим квадратным корнем из числа  $a$  называется неотрицательное число  $b$ , квадрат которого равен  $a$ .  $\sqrt{a} = b : \begin{cases} 1) b \geq 0 \\ 2) b^2 = a \end{cases}, a \geq 0$

| Свойства                                                             | Примеры                                                                                 |
|----------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------|
| 1. $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}, a \geq 0, b \geq 0$         | $\sqrt{225} = \sqrt{25 \cdot 9} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{9} = 5 \cdot 3 = 15$            |
| 2. $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}, a \geq 0, b > 0$ | $\sqrt{\frac{18}{50}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{25}} = \frac{3}{5}$ |
| 3. $\sqrt{a^2} =  a , a - \text{любое}$                              | $\sqrt{4x^4} =  2x^2  = 2x^2, x - \text{любое}$                                         |
| 4. $(\sqrt{a})^2 = a, a \geq 0$                                      | $(\sqrt{7y})^2 = 7y, y \geq 0$                                                          |

Арифметическим корнем натуральной степени  $n \geq 2$  из неотрицательного числа  $a$  называется неотрицательное число,  $n$ -я степень которого равна  $a$ .  $\sqrt[n]{a} = b : \begin{cases} 1) b \geq 0 \\ 2) b^n = a \end{cases}, a \geq 0$ .

| Свойства                                                                      | Примеры                                                                                             |
|-------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}, a \geq 0, b \geq 0$         | $\sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3$                                  |
| 2. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, a \geq 0, b > 0$ | $\frac{\sqrt[4]{3125}}{\sqrt[4]{5}} = \sqrt[4]{\frac{3125}{5}} = \sqrt[4]{625} = \sqrt[4]{5^4} = 5$ |
| 3. $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}, a \geq 0$                                | $(\sqrt[5]{4})^3 = \sqrt[5]{4^3} = \sqrt[5]{2^6} = 2$                                               |
| 4. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}, a \geq 0$                    | $\sqrt[3]{\sqrt{729}} = \sqrt[6]{729} = \sqrt[6]{3^6} = 3$                                          |
| 5. $(\sqrt[n]{a})^n = a, a \geq 0$                                            | $(\sqrt[5]{2})^5 = 2$                                                                               |
| 6. $\sqrt[2k]{a^{2k}} =  a , \text{ где } k \in \mathbb{N}, a - \text{любое}$ | $\sqrt[8]{256} = \sqrt[8]{2^8} = 2$                                                                 |

### Таблица квадратов натуральных чисел от 10 до 99

| Единицы<br>Десятки | 0    | 1    | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    | 7    | 8    | 9    |
|--------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 1                  | 100  | 121  | 144  | 169  | 196  | 225  | 256  | 289  | 324  | 361  |
| 2                  | 400  | 441  | 484  | 529  | 576  | 625  | 676  | 729  | 784  | 841  |
| 3                  | 900  | 961  | 1024 | 1089 | 1156 | 1225 | 1296 | 1369 | 1444 | 1521 |
| 4                  | 1600 | 1681 | 1764 | 1849 | 1936 | 2025 | 2116 | 2209 | 2304 | 2401 |
| 5                  | 2500 | 2601 | 2704 | 2809 | 2916 | 3025 | 3136 | 3249 | 3364 | 3481 |
| 6                  | 3600 | 3721 | 3844 | 3969 | 4096 | 4225 | 4356 | 4489 | 4624 | 4761 |
| 7                  | 4900 | 5041 | 5184 | 5329 | 5476 | 5625 | 5776 | 5929 | 6084 | 6241 |
| 8                  | 6400 | 6561 | 6724 | 6889 | 7056 | 7225 | 7396 | 7569 | 7744 | 7921 |
| 9                  | 8100 | 8281 | 8449 | 8649 | 8836 | 9025 | 9216 | 9409 | 9604 | 9801 |

### Квадратные уравнения

Уравнения вида  $ax^2+bx+c=0$ , где  $a \neq 0$ ,  $b$ ,  $c$  – числа,  $x$  – неизвестное, называется квадратным уравнением.

Уравнения  $ax^2=0$ ;  $ax^2+bx=0$ ;  $ax^2+c=0$  называются неполными квадратными уравнениями.

#### Пример:

$$3x^2-7x+1=0;$$

$$a=3; b=-7; c=1$$

$$5x^2=0$$

$$a=5; b=c=0$$

$$-x^2-\frac{1}{3}x=0$$

$$a=-1; b=\pm\frac{1}{3}; c=0$$

$$1,5x^2+9=0$$

$$a=1,5; c=9$$

## Решение квадратных уравнений

| Уравнения                                                                                                                                                                                   | Примеры                                                                                                                                                                                     |                                                                                                                                                     |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1) $ax^2=0$ ; $x_1=0$ , один корень                                                                                                                                                         | 1) $\frac{1}{17}x^2=0$ ; $x^2=0$ ; $x=0$                                                                                                                                                    |                                                                                                                                                     |
| 2) $ax^2+bx=0$ ; $x \cdot (ax+b)=0$ ;<br>$\begin{cases} x=0 \\ ax+b=0 \end{cases}$ ; $\begin{cases} x_1=0 \\ x_2=-\frac{b}{a} \end{cases}$ два корня                                        | 2) $-3x^2+5x=0$ ; $-x(3x-5)=0$ ;<br>$\begin{cases} -x=0 \\ 3x-5=0 \end{cases}$ ; $\begin{cases} x_1=0 \\ x_2=1\frac{2}{3} \end{cases}$                                                      |                                                                                                                                                     |
| 3) $ax^2+c=0$ ; $x^2=-\frac{c}{a}$ имеет решение, если $-\frac{c}{a}>0$ ;<br>$x_1=\sqrt{-\frac{c}{a}}$ , $x_2=-\sqrt{-\frac{c}{a}}$ два корня.<br>Не имеет решений, если $-\frac{c}{a}<0$ . | 3) $6x^2-9=0$ ; $x^2=\frac{3}{2}$ ; $x_1=\sqrt{\frac{3}{2}}$ ; $x_2=-\sqrt{\frac{3}{2}}$ ;<br>$2x^2+8=0$ ; $x^2=-4$ ; решений нет.                                                          |                                                                                                                                                     |
| 4) $ax^2+bx+c=0$ ; $D=b^2-4ac$<br>Если $D>0$ , то $x_{1,2}=\frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ два корня.<br>Если $D=0$ , то $x_1=-\frac{b}{2a}$ один корень.<br>Если $D<0$ , то корней нет.        | 4) $2x^2-x-1=0$ ;<br>$a=2$ ; $b=-1$ ; $c=-1$ ;<br>$D=(-1)^2-4 \cdot 2 \cdot (-1)=9$ ; $D=9$ ;<br>$x_{1,2}=\frac{1 \pm 3}{4}$ ; $x_1=1$ ; $x_2=-\frac{1}{2}$ .<br>Ответ: 1; $-\frac{1}{2}$ . | $9x^2+6x+1=0$ ; $a=9$ ; $b=6$ ; $c=1$ ;<br>$\frac{D}{4}=3^2-9 \cdot 1=0$ ;<br>$x_1=-\frac{6}{18}$ ; $x_1=-\frac{1}{3}$ .<br>Ответ: $-\frac{1}{3}$ . |
| 5) $ax^2+bx+c=0$ ; если число $b$ четное, то применяем формулу $\frac{D}{4}=\left(\frac{b}{2}\right)^2-ac$ ; $x_{1,2}=\frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{D}{4}}}{a}$                        | 5) $5x^2-7x+10=0$ ; $a=5$ ; $b=-7$ ; $c=10$ ;<br>$D=(-7)^2-4 \cdot 5 \cdot 10=-153<0$ , корней нет.<br>Ответ: $\emptyset$ .                                                                 |                                                                                                                                                     |
| 6) Если старший коэффициент равен 1, то квадратное уравнение называется приведенным $x^2+px+q=0$ .<br>По теореме Виета: $\begin{cases} x_1 \cdot x_2 = q \\ x_1 + x_2 = -p \end{cases}$     | 6) $x^2-5x-6=0$ ; $\begin{cases} x_1 \cdot x_2 = -6 \\ x_1 + x_2 = 5 \end{cases}$ ; $x_1=6$ , $x_2=-1$ .<br>Ответ: 6; -1.                                                                   |                                                                                                                                                     |



## Разложение квадратного трехчлена на множители

$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$ , где  $x_1, x_2$  – корни уравнения  $ax^2+bx+c=0$

Пример:  $2x^2 - x - 5 = 2\left(x - \frac{5}{2}\right)(x+2) = (2x-5)(x+2)$ . Так как  $2x^2-x-5=0$ ;  $a=2$ ,  $x_{1,2} = \frac{1 \pm 9}{4}$ ,  $x_1 = \frac{5}{2}$ ,  $x_2 = -2$ .

## Квадратичная функция

Функция вида  $y=ax^2+bx+c$ , где  $a \neq 0$ ,  $b, c$  – числа;  $x$  – независимая переменная, называется квадратичной функцией.

1.  $y=x^2$

а) О.О.Ф.  $x \in \mathbb{R}$

б) О.З.Ф.  $y \in [0; +\infty)$

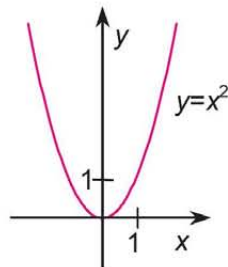
в) нули функции:  $x=0$

г) Монотонность функции

$y \uparrow$ , если  $x \in [0; +\infty)$

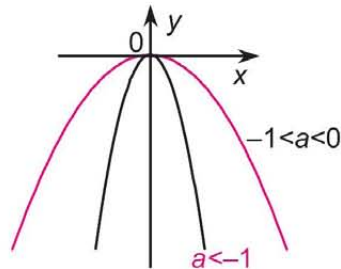
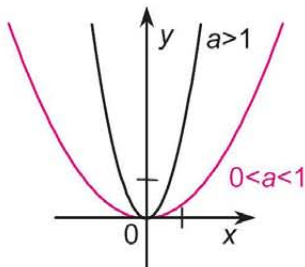
$y \downarrow$ , если  $x \in (-\infty; 0]$

д) ось симметрии – ось ординат



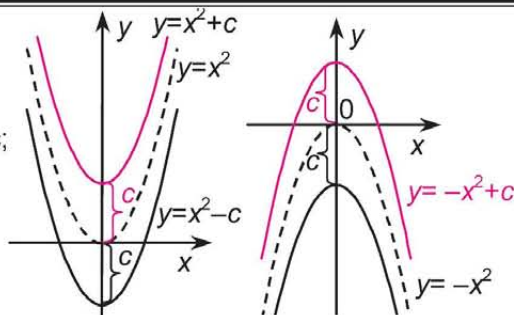
2.  $y=ax^2$

Коэффициент  $a$  отвечает за сужение параболы вдоль оси ординат; если  $|a| < 1$ , то ветви расположены дальше от ОУ; если  $|a| > 1$ , то ветви расположены ближе к ОУ.



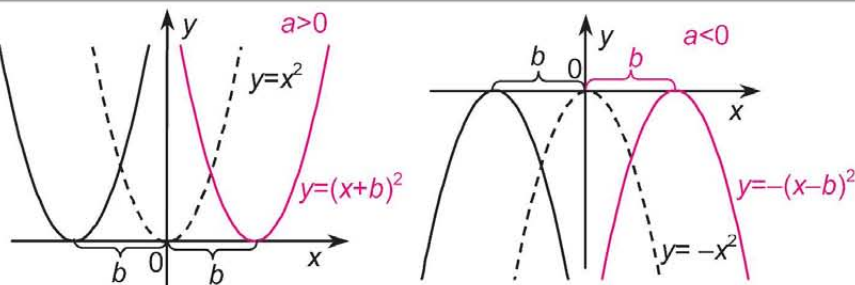
### 3. $y=x^2+c$

Коэффициент  $c$  отвечает за перемещение параболы вдоль оси ординат;  
если  $c>0$ , то график  $y=x^2$  поднимается вверх на  $c$ ;  
если  $c<0$ , то график  $y=x^2$  опускается вниз на  $c$ .

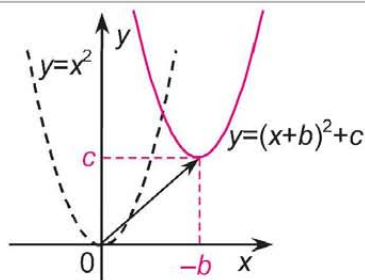


### 4. $y=(x+b)^2$

Коэффициент  $b$  отвечает за перемещение вдоль оси  $OX$ ; если  $b>0$ , то влево на  $b$  единиц от 0; если  $b<0$ , то вправо на  $b$  единиц от 0.



### 5. $y=(x+b)^2+c$



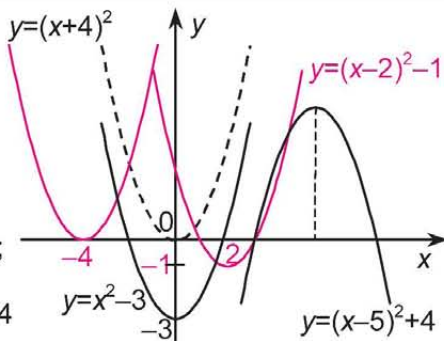
Пример:

$$y=x^2-3;$$

$$y=(x-2)^2-1;$$

$$y=(x+4)^2;$$

$$y=-(x-5)^2+4$$



## Квадратные неравенства

Неравенства вида  $ax^2+bx+c>0$  называются квадратными, где  $a \neq 0$ ,  $b$ ,  $c$  – числа.

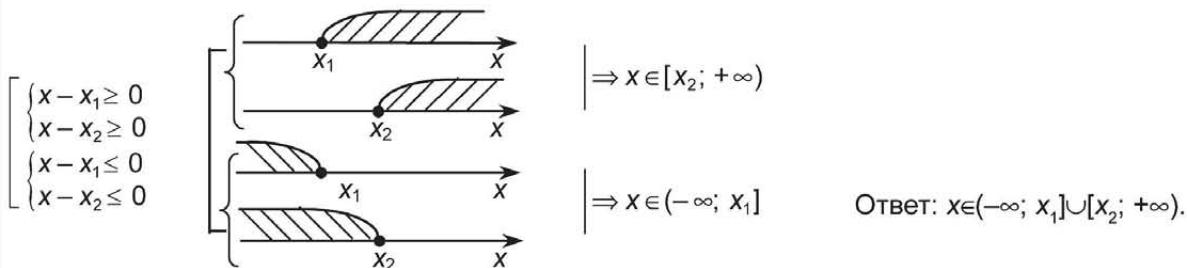
### Способы решения квадратных неравенств

#### 1. Аналитический способ

Решить уравнение  $ax^2+bx+c=0$ , разложить на множители и решить соответствующие системы:

$$ax^2+bx+c \geq 0, \quad a > 0$$

1) Если  $a > 0$ , то  $x_1, x_2$  – корни уравнения, значит,  $a(x-x_1)(x-x_2) \geq 0$



2) если  $a = 0$ , то  $x_1$  – корень, значит,  $a(x-x_1)^2 \geq 0$

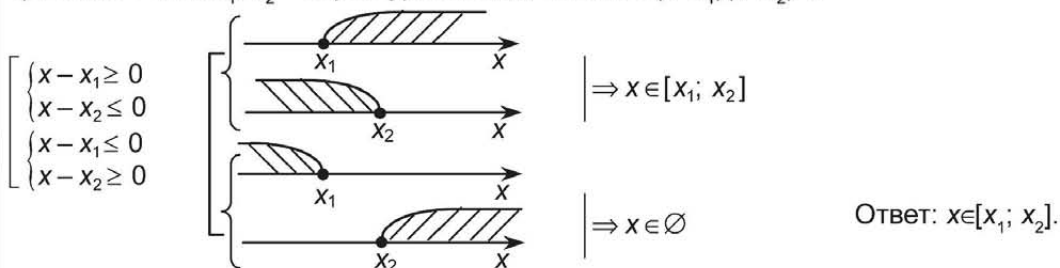
Так как  $a > 0$   $(x-x_1)^2 \geq 0$  при любых значениях  $x$ , то решением неравенства является множество всех действительных чисел.

Ответ:  $x \in \mathbb{R}$ .

3) если  $a < 0$ , то уравнение корней не имеет, значит  $\left. \begin{array}{l} ax^2+bx+c > 0 \\ a > 0 \end{array} \right| \Rightarrow x \in \mathbb{R}.$

$$ax^2+bx+c \geq 0, a < 0$$

1) Если  $a > 0$ , то  $x_1, x_2$  – корни уравнения, значит,  $a(x-x_1)(x-x_2) \geq 0$

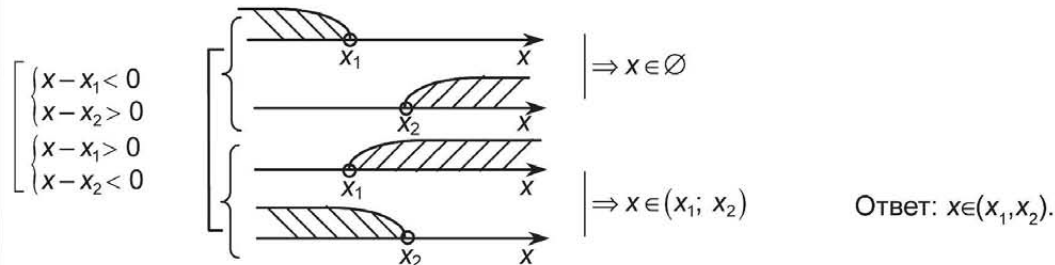


2) Если  $a = 0$ , то  $x_1$  – корень, значит,  $a(x-x_1)^2 \geq 0$ ; так как  $a < 0$ ,  $(x-x_1)^2 \geq 0$  при любых значениях  $x$ , то  $a(x-x_1)^2 \geq 0$  только при  $x = x_1$ , в остальных случаях выражение будет принимать отрицательное значение.  
 Ответ:  $x = x_1$ .

3) Если  $a < 0$ , то уравнение корней не имеет, значит,  $\begin{cases} ax^2+bx+c > 0 \\ a < 0 \end{cases} \Rightarrow x \in \emptyset$ .

$$ax^2+bx+c < 0, a > 0$$

1) Если  $a > 0$ , то  $x_1, x_2$  – корни, значит,  $a(x-x_1)(x-x_2) < 0$ .



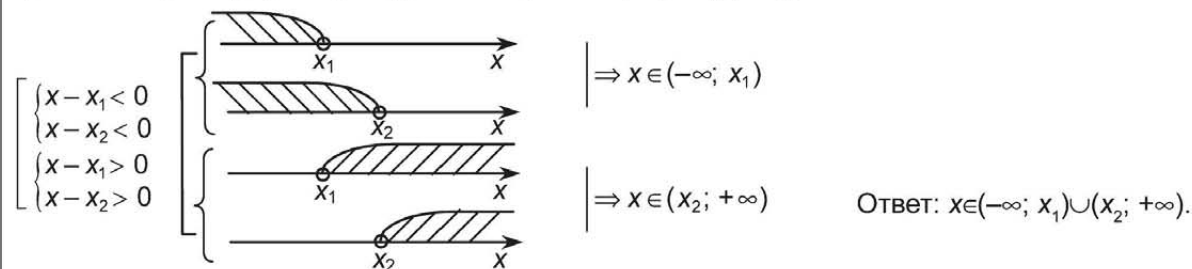
2) Если  $a=0$ , то  $x_1$  – корень, значит,  $a(x-x_1)^2>0$ . Так как  $a>0$  и  $(x-x_1)^2<0$  при любых значениях, кроме  $x=x_1$ , то неравенство не имеет решений.

Ответ:  $x \in \emptyset$ .

3) Если  $a < 0$ , то уравнение корней не имеет, значит,  $\begin{cases} ax^2 + bx + c < 0 \\ a > 0 \end{cases} \Rightarrow x \in \emptyset$

$$ax^2 + bx + c < 0, a < 0$$

1) Если  $a > 0$ , то  $x_1, x_2$  – корни уравнения, значит,  $a(x-x_1)(x-x_2) < 0$



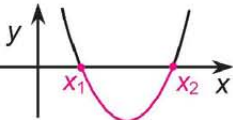
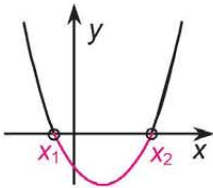
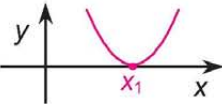
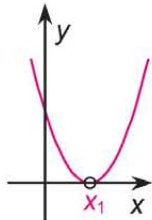
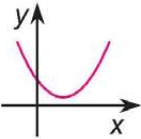
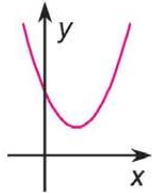
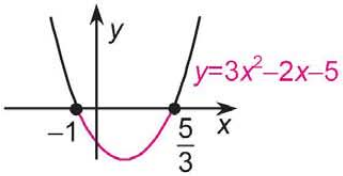
2) Если  $a=0$ , то  $x_1$  – корень, значит,  $a(x-x_1)^2 < 0$ . Так как  $a < 0$  и  $(x-x_1)^2 > 0$  при любых значениях  $x$ , кроме  $x=x_1$ , то  $a(x-x_1)^2 < 0$  при любых значениях  $x$ , кроме  $x=x_1$ .

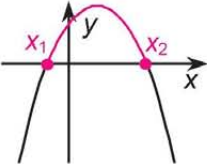
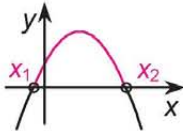
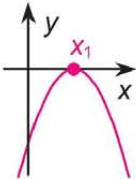
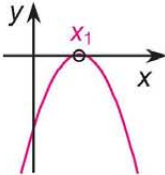
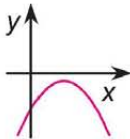
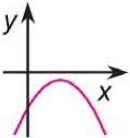
Ответ:  $x \neq x_1$ , (или  $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_1; +\infty)$ ).

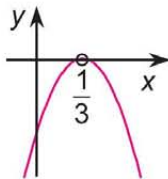
3) Если  $a < 0$ , то уравнение корней не имеет, значит,  $\begin{cases} ax^2 + bx + c < 0 \\ a < 0 \end{cases} \Rightarrow x \in R$

## 2. Графический способ

Решить уравнение  $ax^2+bx+c=0$  и схематично построить график функции:

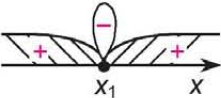
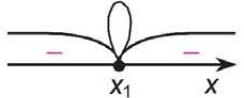
| $ax^2+bx+c \geq 0, a > 0$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | $ax^2+bx+c < 0, a > 0$                                                                                                                                                                                                  |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>Если <math>a &gt; 0</math>, то <math>x_1, x_2</math> – корни.<br/>                     Ответ: <math>x \in (-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty)</math>.</p>                                                                                                                                                      | <p>Если <math>a &gt; 0</math>, то <math>x_1, x_2</math> – корни.<br/>                     Ответ: <math>x \in (x_1; x_2)</math>.</p>  |
| <p>Если <math>a = 0</math>, то <math>x_1</math> – корень.<br/>                     Ответ: <math>x \in \mathbb{R}</math>.</p>                                                                                                                                                                                     | <p>Если <math>a = 0</math>, то <math>x_1</math> – корень.<br/>                     Ответ: <math>x \in \emptyset</math>.</p>          |
| <p>Если <math>a &lt; 0</math>, то корней нет.<br/>                     Ответ: <math>x \in \mathbb{R}</math>.</p>                                                                                                                                                                                                 | <p>Если <math>a &lt; 0</math>, то корней нет.<br/>                     Ответ: <math>x \in \emptyset</math>.</p>                      |
| <p>Пример: <math>3x^2-2x-5 \leq 0</math>. Рассмотрим <math>3x^2-2x-5=0</math>.<br/> <math>\frac{D}{4} = 1+15=16</math>; <math>x_{1,2} = \frac{1 \pm 4}{3}</math>; <math>x_1 = \frac{5}{3}</math>, <math>x_2 = -1</math>.<br/>                     Ответ: <math>x \in \left[-1; \frac{5}{3}\right]</math>.</p>  |                                                                                                                                                                                                                         |

| $ax^2+bx+c \geq 0, a < 0$                                                                                                                                                                                                                       | $ax^2+bx+c < 0, a < 0$                                                                                                                                                                                                              |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>Если <math>a &gt; 0</math>, то <math>x_1, x_2</math> – корни.<br/>         Ответ: <math>x \in [x_1; x_2]</math>.</p>                                        | <p>Если <math>a &gt; 0</math>, то <math>x_1, x_2</math> – корни.<br/>         Ответ: <math>x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)</math>.</p>  |
| <p>Если <math>a = 0</math>, то <math>x_1</math> – корень.<br/>         Ответ: <math>x = x_1</math>.</p>                                                        | <p>Если <math>a = 0</math>, то <math>x_1</math> – корень.<br/>         Ответ: <math>x \in (-\infty; x_1) \cup (x_1; +\infty)</math>.</p>         |
| <p>Если <math>a &lt; 0</math>, то корней нет.<br/>         Ответ: <math>x \in \emptyset</math>.</p>                                                            | <p>Если <math>a &lt; 0</math>, то корней нет.<br/>         Ответ: <math>x \in \mathbb{R}</math>.</p>                                             |
| <p>Пример: <math>-9x^2+6x-1 &gt; 0</math>.<br/>         Рассм. <math>-9x^2+6x-1=0</math>; <math>-(-9x^2-6x+1)=0</math>;<br/> <math>-(3x-1)^2=0</math>;<br/> <math>x = \frac{1}{3}</math>.<br/>         Ответ: <math>x \in \emptyset</math>.</p> |                                                                                                                                                                                                                                     |

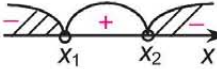
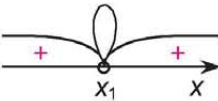
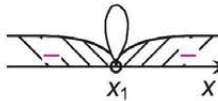
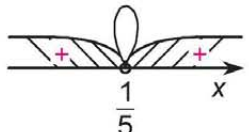
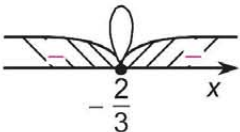


## Метод интервалов

Решить уравнение  $ax^2+bx+c=0$  и нанести корни уравнения на числовую прямую. На каждом из образовавшихся интервалов определить знак выражения по старшему коэффициенту.

| $ax^2+bx+c \geq 0, a > 0$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | $ax^2+bx+c \geq 0, a < 0$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>Если <math>a &gt; 0</math>, то <math>x_1, x_2</math> – корни.<br/>                     Ответ: <math>x \in (-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty)</math>.</p>  <p>Если старший коэффициент <math>a &gt; 0</math>, то крайний правый интервал положительный.<br/>                     Далее знаки интервала чередуются.</p> | <p>Если <math>a &gt; 0</math>, то <math>x_1, x_2</math> – корни.<br/>                     Ответ: <math>x \in [x_1, x_2]</math>.</p>  <p>Если старший коэффициент <math>a &lt; 0</math>, то крайний правый интервал отрицательный.<br/>                     Далее знаки интервалов чередуются.</p> |
| <p>Если <math>a = 0</math>, то <math>x_1</math> – корень.<br/>                     Ответ: <math>x \in R</math>.</p>  <p>Если <math>x_1</math> – корень четной кратности, то чередования знаков у интервалов не происходит.</p>                                                                                           | <p>Если <math>a = 0</math>, то <math>x_1</math> – корень.<br/>                     Ответ: <math>x = x_1</math>.</p>                                                                                                                                                                               |
| <p>Если <math>a &lt; 0</math>, то корней нет.<br/>                     Ответ: <math>x \in R</math>.</p>  <p>Так как <math>a &gt; 0</math> и трехчлен больше нуля, то решением неравенства является множество всех действительных чисел.</p>                                                                              | <p>Если <math>a &lt; 0</math>, то корней нет.<br/>                     Ответ: <math>x \in \emptyset</math>.</p>  <p>Так как <math>a &lt; 0</math>, а трехчлен больше нуля, то неравенство решения не имеет.</p>                                                                                   |



| $ax^2+bx+c<0, a>0$                                                                                                                                                                                                                                                                                               | $ax^2+bx+c<0, a<0$                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>Если <math>a&gt;0</math>, то <math>x_1, x_2</math> – корни.<br/>         Ответ: <math>x \in (x_1; x_2)</math>.</p>                                                                                                           | <p>Если <math>a&gt;0</math>, то <math>x_1, x_2</math> – корни.<br/>         Ответ: <math>x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)</math>.</p>                                                                                             |
| <p>Если <math>a=0</math>, то <math>x_1</math> – корень.<br/>         Ответ: <math>x \in \emptyset</math>.</p>                                                                                                                   | <p>Если <math>a=0</math>, то <math>x_1</math> – корень.<br/>         Ответ: <math>x \in (-\infty; x_1) \cup (x_1; +\infty)</math>.</p>                                                                                                    |
| <p>Если <math>a&lt;0</math>, то корней нет.<br/>         Ответ: <math>x \in \emptyset</math>.</p>  <p>Так как <math>a&gt;0</math>, а трехчлен меньше нуля, значит, неравенство решения не имеет.</p>                            | <p>Если <math>a&lt;0</math>, то корней нет.<br/>         Ответ: <math>x \in \mathbb{R}</math>.</p>  <p>Так как <math>a&lt;0</math> и трехчлен меньше нуля, значит, решением неравенства является множество всех действительных чисел.</p> |
| Пример:                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |
| <p><math>25x^2-10x+1&gt;0</math><br/>         Рассмотрим <math>25x^2-10x+1&gt;0</math>.<br/> <math>(5x-1)^2=0; x=\frac{1}{5}</math>.</p>  <p>Ответ: <math>x \in (-\infty; \frac{1}{5}) \cup (\frac{1}{5}; +\infty)</math>.</p> | <p><math>-4-12x-9x^2\leq 0</math><br/>         Рассмотрим <math>-9x^2-12x-4=0</math>.<br/> <math>-(3x+2)^2=0; x=\pm\frac{2}{3}</math>.</p>  <p>Ответ: <math>x \in \mathbb{R}</math>.</p>                                                 |

## Степенная функция

### Функция $y=x^3$

График функции – кубическая парабола.

1) О.О.Ф.  $x \in \mathbb{R}$

2) О.З.Ф.  $y \in \mathbb{R}$

3) нули функции  $x=0$

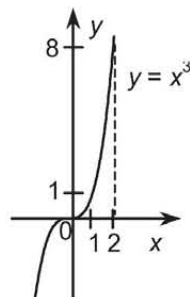
4) знакопостоянство:

$y > 0$ , если  $x \in (0; +\infty)$ ,

$y < 0$ , если  $x \in (-\infty; 0)$

5) монотонность:  $y \uparrow$ , если  $x \in \mathbb{R}$

6) начало отсчета – центр симметрии



$$y=(x+a)^3+b$$

число  $a$  – отвечает за перемещение вдоль оси  $OX$ ;

если  $a > 0$ , то влево на  $a$  единиц от 0;

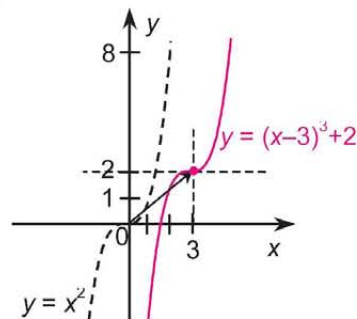
если  $a < 0$ , то вправо на  $a$  единиц от 0.

число  $b$  – отвечает за перемещение вдоль оси  $OY$ ;

если  $b > 0$ , то вверх на  $b$  единиц от 0;

если  $b < 0$ , то вниз на  $b$  единиц от 0.

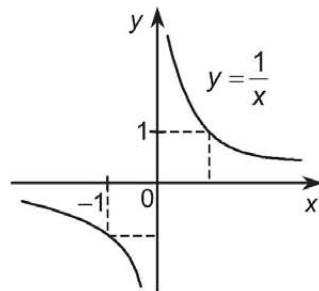
$$y=(x-3)^3+2$$



# Функция $y = \frac{1}{x}$

График функции – гипербола.

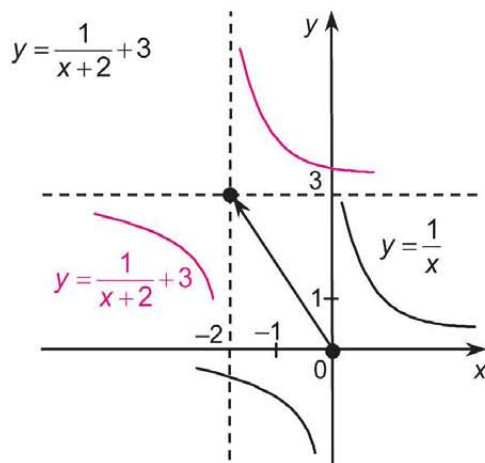
- 1) О.О.Ф  $x \neq 0$
- 2) О.З.Ф  $y \neq 0$
- 3) нули функции: нет
- 4) знакопостоянство:  
 $y > 0$ , если  $x \in (0; +\infty)$ ,  
 $y < 0$ , если  $x \in (-\infty; 0)$
- 5) монотонность:  $y \downarrow$ , если  $x \neq 0$
- 6) начало отсчета – центр симметрии



$$y = \frac{1}{(a+x)} + b$$

число  $a$  – отвечает за перемещение вдоль оси  $OX$ ;  
 если  $a > 0$ , то влево на  $a$  единиц от 0;  
 если  $a < 0$ , то вправо на  $a$  единиц от 0.

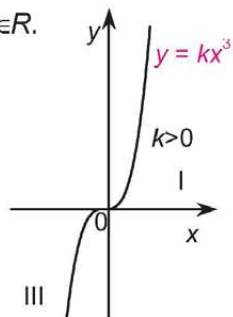
число  $b$  – отвечает за перемещение вдоль оси  $OY$ ;  
 если  $b > 0$ , то вверх на  $b$  единиц от 0;  
 если  $b < 0$ , то вниз на  $b$  единиц от 0.



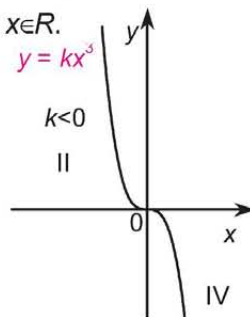
$$y=kx^3$$

Коэффициент  $k$  — отвечает за то, в каких координатных углах расположена кубическая парабола.

если  $k>0$ , то  $y \uparrow$  при  $x \in \mathbb{R}$ .



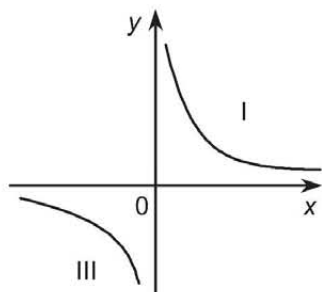
если  $k<0$ , то  $y \downarrow$  при  $x \in \mathbb{R}$ .



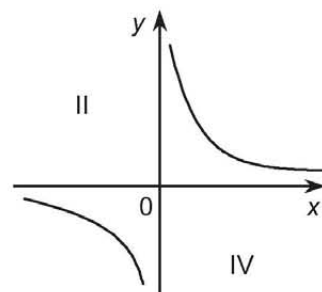
$$y = \frac{k}{x}$$

Коэффициент  $k$  — отвечает за то, в каких координатных углах расположена гипербола

если  $k>0$ , то  $y \downarrow$  при  $x \neq 0$ .

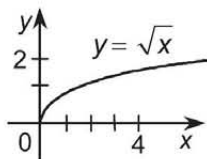


если  $k<0$ , то  $y \uparrow$  при  $x \neq 0$ .

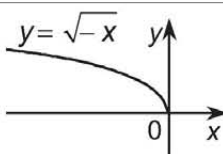


Функция  $y = \sqrt{x}$ 

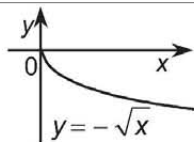
- 1) О.О.Ф.  $x \in [0; +\infty)$
- 2) О.З.Ф.  $y \in [0; +\infty)$
- 3) нули функции  $x=0$
- 4) знакопостоянство:  $y > 0$ , если  $x \in (0; +\infty)$
- 5) монотонность:  $y \uparrow$ , если  $x \in [0; +\infty)$



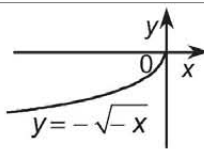
- 1)  $x \in (-\infty; 0)$
- 2)  $y \in [0; +\infty)$
- 3)  $x=0$
- 4)  $y > 0$ , если  $x \in (-\infty; 0)$
- 5)  $y \downarrow$ , если  $x \in (-\infty; 0]$



- 1)  $x \in [0; +\infty)$
- 2)  $y \in (-\infty; 0]$
- 3)  $x=0$
- 4)  $y < 0$ , если  $x \in (0; +\infty)$
- 5)  $y \downarrow$ , если  $x \in [0; +\infty)$



- 1)  $x \in (-\infty; 0]$
- 2)  $y \in (-\infty; 0]$
- 3)  $x=0$
- 4)  $y < 0$ , если  $x \in (-\infty; 0)$
- 5)  $y \uparrow$ , если  $x \in (-\infty; 0]$

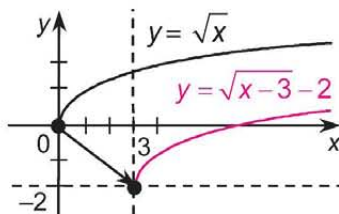


$$y = \sqrt{x+a} + b$$

число  $a$  – отвечает за перемещение вдоль оси  $OX$ ;  
если  $a > 0$ , то влево на  $a$  единиц от 0;  
если  $a < 0$ , то вправо на  $a$  единиц от 0.

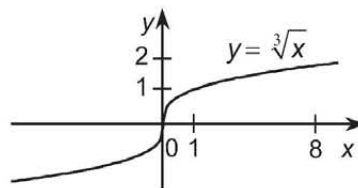
число  $b$  – отвечает за перемещение вдоль оси  $OY$ ;  
если  $b > 0$ , то вверх на  $b$  единиц от 0;  
если  $b < 0$ , то вниз на  $b$  единиц от 0.

$$y = \sqrt{x-3} - 2$$



### Функция $y = \sqrt[3]{x}$

- 1) О.О.Ф.  $x \in \mathbb{R}$
- 2) О.З.Ф.  $y \in \mathbb{R}$
- 3) нули функции  $x=0$
- 4) знакопостоянство:  $y>0$ , если  $x>0$ ;  $y<0$ , если  $x<0$
- 5) монотонность:  $y \uparrow$ , если  $x \in \mathbb{R}$



Функция  $y=f(x)$  называется **возрастающей** на промежутке, если большему значению аргумента соответствует большее значение функции.

если  $x_2 > x_1$  и  $f(x_2) > f(x_1)$ , то  $f(x)$  – возрастает.

Функция  $y=f(x)$  называется **убывающей** на промежутке, если большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции.

если  $x_2 > x_1$  и  $f(x_2) < f(x_1)$ , то  $f(x)$  – убывает.

Функция  $y=f(x)$  называется **четной** на всей области определения, если верно равенство  $f(-x)=f(x)$ . График четной функции симметричен относительно оси ординат.

Функция  $y=f(x)$  называется **нечетной** на всей области определения, если верно равенство  $f(-x) = -f(x)$ .

График нечетной функции симметричен относительно начала отсчета.

## Прогрессии

1. Числовая последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему члену, сложенному с одним и тем же числом  $d$ , называется **арифметической прогрессией**.

Число  $d$  – разность прогрессии.  $a_n = a_{n-1} + d$ ;  $d = a_n - a_{n-1}$ .

формула  $n$ -члена:  $a_n = a_1 + (n-1)d$

свойство прогрессии:  $a_n = \frac{a_{n+k} + a_{n-k}}{2}$

сумма  $n$ -членов:  $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$  или  $S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$

2. Числовая последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему члену, умноженному на одно и то же число  $q$ , называется **геометрической прогрессией**.

Число  $q$  – знаменатель прогрессии.  $b_n = b_{n-1} \cdot q$ ;  $q = \frac{b_n}{b_{n-1}}$ .

формула  $n$ -члена:  $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$

свойство прогрессии:  $b_n = \sqrt{b_{n+k} \cdot b_{n-k}}$

сумма  $n$ -членов:  $S_n = \frac{b_1 \cdot (1 - q^n)}{1 - q}$ ,  $q \neq 1$

Если  $|q| < 1$ , то прогрессия называется бесконечно убывающей геометрической прогрессией.

$$S = \frac{b_1}{1 - q}$$

## Иррациональные уравнения

Уравнения вида  $\sqrt{f(x)} = a$ , где  $a$  – число, называется **иррациональным уравнением**.

Если  $a < 0$ , то уравнение корней не имеет; если  $a \geq 0$ , то  $f(x) = a^2$ .

$$\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$$

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases}$$

$$\sqrt{f(x)} = g(x)$$

$$\begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = g^2(x) \end{cases}$$

Неравенства вида  $\sqrt{f(x)} \geq a$  или  $\sqrt{f(x)} < a$  называются **иррациональными неравенствами**.

$$\sqrt{f(x)} \geq a$$

$$\begin{cases} a < 0 \\ f(x) \geq 0 \\ a \geq 0 \\ f(x) \geq a^2 \\ f(x) = a^2 \end{cases}$$

$$\sqrt{f(x)} < a$$

$$\begin{cases} a > 0 \\ f(x) \geq 0 \\ f(x) < a^2 \end{cases}$$

$$\sqrt{f(x)} > g(x)$$

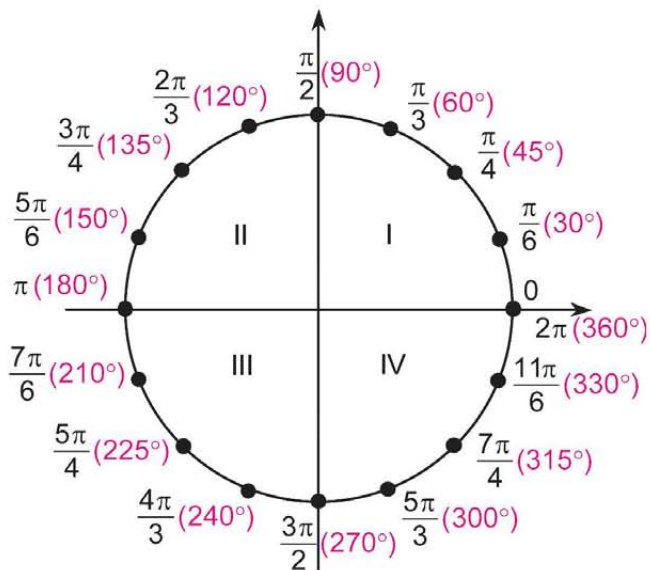
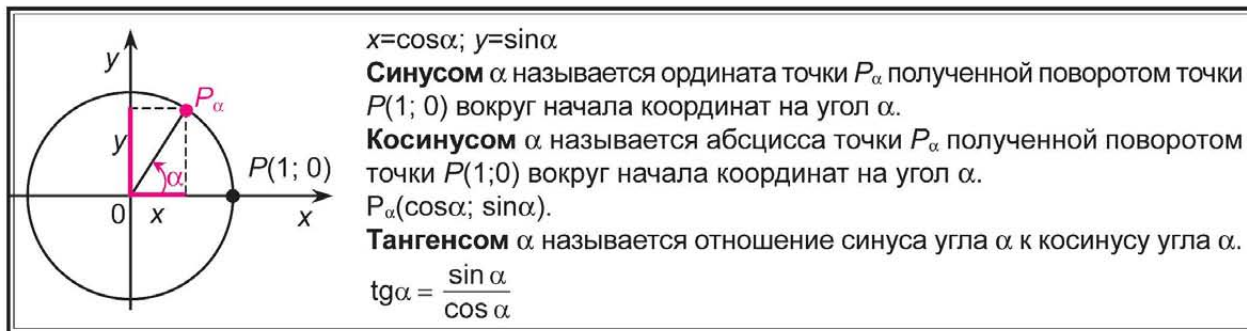
$$\begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) \geq 0 \\ f(x) > g^2(x) \\ g(x) < 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases}$$

$$\sqrt{f(x)} \leq \sqrt{g(x)}$$

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) \leq g(x) \end{cases}$$



## Тригонометрия

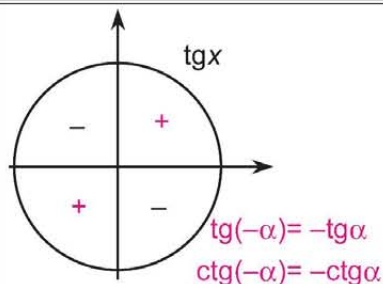
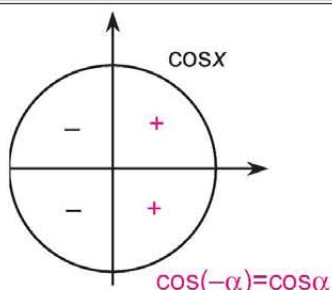
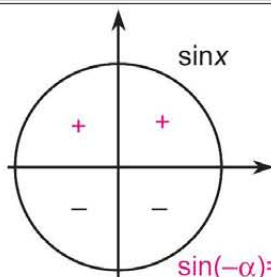


|                        | 0        | $\frac{\pi}{6}$ (30°) | $\frac{\pi}{4}$ (45°) | $\frac{\pi}{3}$ (60°) | $\frac{\pi}{2}$ (90°) |
|------------------------|----------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| $\sin x$               | 1        | $\frac{1}{2}$         | $\frac{\sqrt{2}}{2}$  | $\frac{\sqrt{3}}{2}$  | 1                     |
| $\cos x$               | 0        | $\frac{\sqrt{3}}{2}$  | $\frac{\sqrt{2}}{2}$  | $\frac{1}{2}$         | 0                     |
| $\operatorname{tg} x$  | 0        | $\frac{1}{\sqrt{3}}$  | 1                     | $\sqrt{3}$            | $\infty$              |
| $\operatorname{ctg} x$ | $\infty$ | $\sqrt{3}$            | 1                     | $\frac{1}{\sqrt{3}}$  | 0                     |

## Основное тригонометрическое тождество

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}; \quad 1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}; \quad \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$$



| Формулы сложения                                                                                                                                              | Примеры                                                                                                                                                                                                                                                                                       |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \pm \sin\alpha \cdot \sin\beta$                                                                          | $\cos 75^\circ = \cos(45^\circ + 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ - \sin 45^\circ \sin 30^\circ =$ $= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$                                                              |
| $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\alpha \cdot \sin\beta$                                                                          | $\cos 50^\circ \sin 80^\circ - \sin 50^\circ \cos 80^\circ = \sin(80^\circ - 50^\circ) =$ $= \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$                                                                                                                                                                     |
| $\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \pm \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}$ | $\operatorname{tg} 150^\circ = \operatorname{tg}(60^\circ + 45^\circ) = \frac{\operatorname{tg} 60^\circ + \operatorname{tg} 45^\circ}{1 - \operatorname{tg} 60^\circ \cdot \operatorname{tg} 45^\circ} =$ $= \frac{\sqrt{3} + 1}{1 - \sqrt{3}} = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{-2} = -(1 + \sqrt{3})$ |

| Формулы двойного угла                                                                          | Примеры                                                                                                         |
|------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$                                                  | $\sin 10x = 2\sin 5x \cdot \cos 5x$<br>$8\cos 3x \cdot \sin 3x = 4 \cdot (2\sin 3x \cos 3x) = 4\sin 6x$         |
| $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2\sin^2 \alpha$       | $\cos 7x = \cos^2 \frac{7x}{2} - \sin^2 \frac{7x}{2}$<br>$\cos 16x = 2\cos^2 8x - 1; \cos 12x = 1 - 2\sin^2 6x$ |
| $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$ | $\frac{2\operatorname{tg} 2x}{1 - \operatorname{tg}^2 2x} = \operatorname{tg} 4x$                               |

| Формулы понижения степени                       | Примеры                                                                        |
|-------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------|
| $\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha)$ | $\sin^2 5x = \frac{1}{2}(1 - \cos 10x)$                                        |
| $\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)$ | $(1 + \cos 8x) = 2 \cdot \left[ \frac{1}{2}(1 + \cos 8x) \right] = 2\cos^2 4x$ |

| Формулы суммы и разности синусов и косинусов                                                    | Примеры                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\sin \alpha + \sin \beta = 2\sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$ | $\sin 75^\circ + \cos 75^\circ = \sin 75^\circ + \cos(90^\circ - 15^\circ) =$<br>$= \sin 75^\circ + \sin 15^\circ = 2\sin \frac{75^\circ + 15^\circ}{2} \cdot \cos \frac{75^\circ - 15^\circ}{2} =$<br>$= 2\sin 45^\circ \cdot \cos 30^\circ = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$ |
| $\sin \alpha - \sin \beta = 2\sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$ |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |
| $\cos \alpha + \cos \beta = 2\cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$ |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |

|                                                                                                   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$ | $\cos \frac{11\pi}{12} - \cos \frac{5\pi}{12} = -2 \sin \frac{\frac{11\pi}{12} + \frac{5\pi}{12}}{2} \cdot \sin \frac{\frac{11\pi}{12} - \frac{5\pi}{12}}{2} =$ $= -2 \sin \frac{2\pi}{3} \cdot \sin \frac{\pi}{4} = -2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{6}}{2}$ |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

|                                                            |                                                                                                                                     |
|------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2}(\sin(x+y) + \sin(x-y))$ | $2\sin 50^\circ \cdot \cos 40^\circ = \sin 90^\circ + \sin 10^\circ = 1 + \sin 10^\circ$                                            |
| $\sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$ | $3\cos 20^\circ \cdot \cos 80^\circ = \frac{3}{2}(\cos 100^\circ + \cos 60^\circ) =$<br>$= \frac{3}{2}\cos 100^\circ + \frac{3}{4}$ |
| $\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y))$ |                                                                                                                                     |

### Формулы приведения

| $\alpha$                    | $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$      | $\pi \pm \alpha$                | $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$     | $2\pi \pm \alpha$               |
|-----------------------------|---------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|
| $\cos \alpha$               | $\pm \sin \alpha$               | $-\cos \alpha$                  | $\pm \sin \alpha$               | $+\cos \alpha$                  |
| $\sin \alpha$               | $+\cos \alpha$                  | $\pm \sin \alpha$               | $-\cos \alpha$                  | $\pm \sin \alpha$               |
| $\operatorname{tg} \alpha$  | $\pm \operatorname{ctg} \alpha$ | $\pm \operatorname{tg} \alpha$  | $\pm \operatorname{ctg} \alpha$ | $\pm \operatorname{tg} \alpha$  |
| $\operatorname{ctg} \alpha$ | $\pm \operatorname{tg} \alpha$  | $\pm \operatorname{ctg} \alpha$ | $\pm \operatorname{tg} \alpha$  | $\pm \operatorname{ctg} \alpha$ |

## Тригонометрические функции

### $y = \cos x$

1) О.О.Ф.  $x \in \mathbb{R}$

2) О.З.Ф.  $y \in [-1; 1]$

3) Нули функции  $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

4) Знакопостоянство:

$y > 0$ , если  $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right), n \in \mathbb{Z}$

$y < 0$ , если  $x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right), n \in \mathbb{Z}$

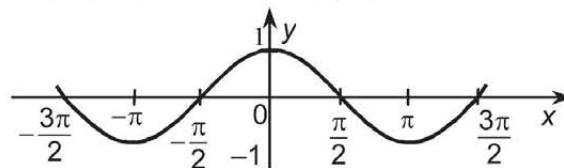
5) Монотонность:

$y \uparrow$ , если  $x \in [\pi + 2\pi n; 2\pi + 2\pi n], n \in \mathbb{Z}$

$y \downarrow$ , если  $x \in [0 + 2\pi n; \pi + 2\pi n], n \in \mathbb{Z}$

6) Функция периодическая:  $q = 2\pi$

7) Функция четная:  $\cos(-x) = \cos x$



### $y = \sin x$

1) О.О.Ф.  $x \in \mathbb{R}$

2) О.З.Ф.  $y \in [-1; 1]$

3) Нули функции  $x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$

4) Знакопостоянство:

$y > 0$ , если  $x \in (0 + 2\pi n; \pi + 2\pi n), n \in \mathbb{Z}$

$y < 0$ , если  $x \in (\pi + 2\pi n; 2\pi + 2\pi n), n \in \mathbb{Z}$

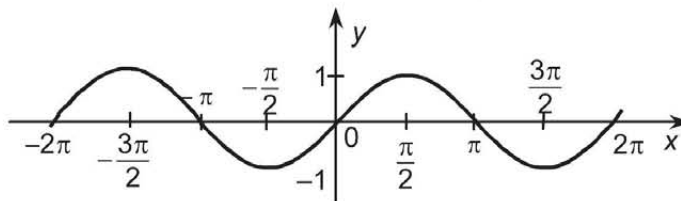
5) Монотонность:

$y \uparrow$ , если  $x \in \left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right], n \in \mathbb{Z}$

$y \downarrow$ , если  $x \in \left[\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right], n \in \mathbb{Z}$

6) Функция периодическая:  $q = 2\pi$

7) Функция нечетная:  $\sin(-x) = -\sin x$



**$y = \operatorname{tg} x$** 

1) О.О.Ф.  $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

2) О.З.Ф.  $y \in \mathbb{R}$

3) Нули функции  $x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$

4) Знакопостоянство:

$y > 0$ , если  $x \in \left(0 + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right), k \in \mathbb{Z}$

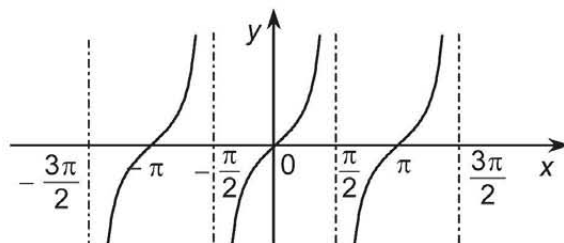
$y < 0$ , если  $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; 0 + \pi k\right), k \in \mathbb{Z}$

5) Монотонность:

$y \uparrow$ , если  $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right), k \in \mathbb{Z}$

6) Функция периодическая:  $q = \pi$

7) Функция нечетная:  $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$

 **$y = \operatorname{ctg} x$** 

1) О.О.Ф.  $x \neq \pi k, k \in \mathbb{Z}$

2) О.З.Ф.  $y \in \mathbb{R}$

3) Нули функции  $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

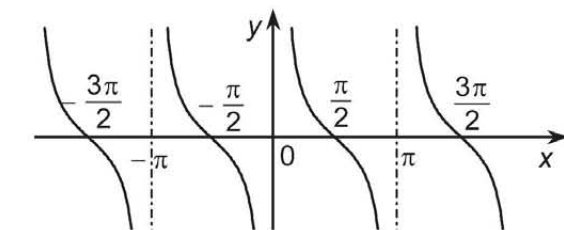
4) Знакопостоянство:

$y > 0$ , если  $x \in \left(0 + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right), k \in \mathbb{Z}$

$y < 0$ , если  $x \in \left(\frac{\pi}{2} + \pi k; \pi + \pi k\right), k \in \mathbb{Z}$

5) Монотонность:

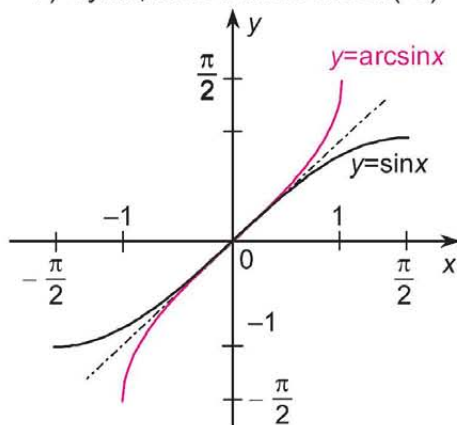
$y \downarrow$ , если  $x \in (0 + \pi k; \pi + \pi k), k \in \mathbb{Z}$



## Обратные тригонометрические функции

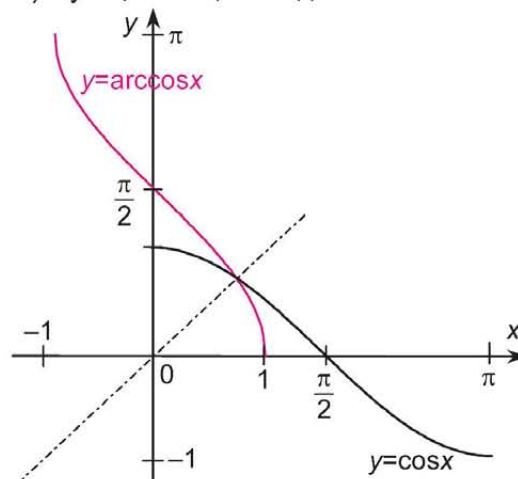
**$y = \arcsin x$**

- 1) О.О.Ф.  $x \in [-1; 1]$
- 2) О.З.Ф.  $y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$
- 3) Нули функции  $x=0$
- 4) Знакопостоянство:  
 $y > 0$ , если  $x \in (0; 1]$   
 $y < 0$ , если  $x \in [-1; 0)$
- 5) Монотонность:  
 $y \uparrow$ , если  $x \in [-1; 1]$ ,  $k \in \mathbb{Z}$
- 6) Функция неперiodическая
- 7) Функция нечетная:  $\arcsin(-x) = -\arcsin x$



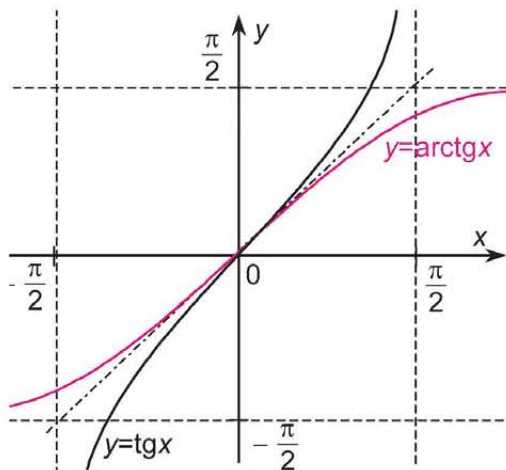
**$y = \arccos x$**

- 1) О.О.Ф.  $x \in [-1; 1]$
- 2) О.З.Ф.  $y \in [0; \pi]$
- 3) Нули функции  $x=1$
- 4) Знакопостоянство:  
 $y > 0$ , если  $x \in [-1; 1)$
- 5) Монотонность:  
 $y \downarrow$ , если  $x \in [-1; 1]$ ,  $k \in \mathbb{Z}$
- 6) Функция неперiodическая
- 7) Функция общего вида

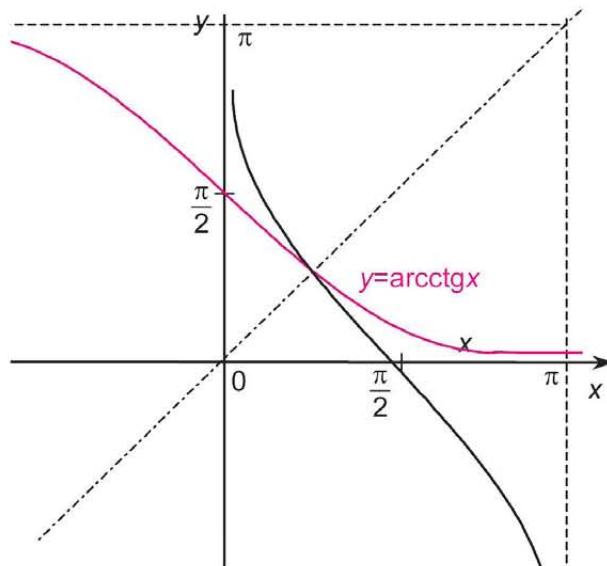


**$y = \arctg x$** 

- 1) О.О.Ф.  $x \in \mathbb{R}$
- 2) О.З.Ф.  $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
- 3) Нули функции:  $x=0$
- 4) Знакопостоянство:  
 $y > 0$ , если  $x \in (0; +\infty)$   
 $y < 0$ , если  $x \in (-\infty; 0)$
- 5) Монотонность:  
 $y \uparrow$ , если  $x \in \mathbb{R}$
- 6) Функция неперiodическая
- 7) Функция нечетная  $\arctg(-x) = -\arctg x$

 **$y = \text{arcctg} x$** 

- 1) О.О.Ф.  $x \in \mathbb{R}$
- 2) О.З.Ф.  $y \in (0; \pi)$
- 3) Нули функции: нет
- 4) Знакопостоянство:  
 $y > 0$ , если  $x \in \mathbb{R}$
- 5) Монотонность:  
 $y \downarrow$ , если  $x \in \mathbb{R}$
- 6) Функция неперiodическая
- 7) Функция общего вида

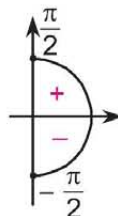




1. Арксинусом числа  $a \in [-1; 1]$  называется такое число  $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ ,  
синус которого равен  $a$ .

$$\arcsin a = \alpha : \sin \alpha = a, \text{ где } a \in [-1; 1]; \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

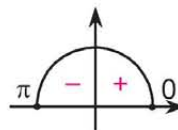
$$\arcsin(-a) = -\arcsin a$$



2. Арккосинусом числа  $a \in [-1; 1]$  называется такое число  $\alpha \in [0; \pi]$ ,  
косинус которого равен  $a$ .

$$\arccos a = \alpha : \cos \alpha = a, \text{ где } a \in [-1; 1]; \alpha \in [0; \pi].$$

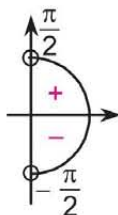
$$\arccos(-a) = \pi - \arccos a$$



3. Арктангенсом числа  $a \in \mathbb{R}$  называется такое число  $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ ,  
тангенс которого равен  $a$ .

$$\arctg a = \alpha : \operatorname{tg} \alpha = a, \text{ где } a - \text{любое}, \alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right).$$

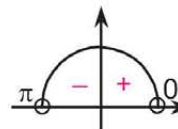
$$\arctg(-a) = -\arctg a$$



4. Арккотангенсом числа  $a \in \mathbb{R}$  называется такое число  $\alpha \in (0; \pi)$ ,  
котангенс которого равен  $a$ .

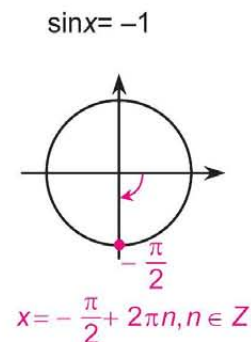
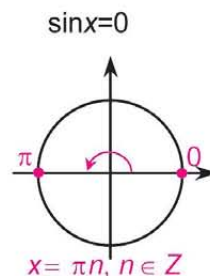
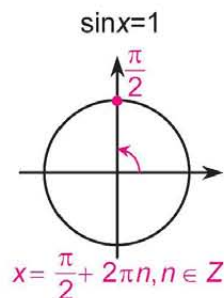
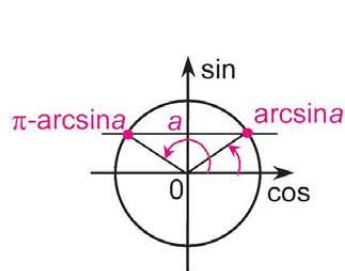
$$\operatorname{arccotg} a = \alpha : \operatorname{ctg} \alpha = a, \text{ где } a - \text{любое}, \alpha \in (0; \pi).$$

$$\operatorname{arccotg}(-a) = \pi - \operatorname{arccotg} a$$

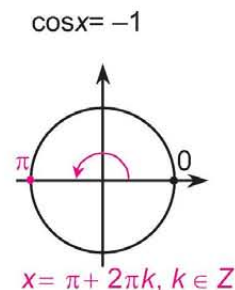
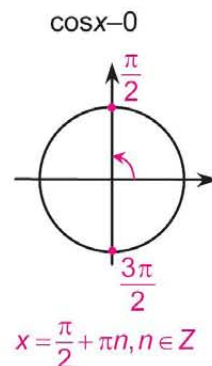
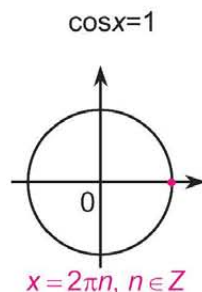


## Тригонометрические уравнения

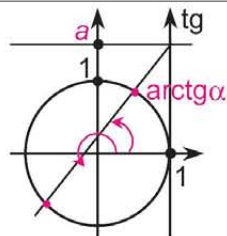
1.  $\sin x = a, |a| \leq 1$ ;  $\begin{cases} x = \arcsin a + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x = \pi - \arcsin a + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$  или  $x = (-1)^k \cdot \arcsin a + \pi k, k \in \mathbb{Z}$ .



2.  $\cos x = a, |a| \leq 1$ ;  $\begin{cases} x = \arccos a + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x = -\arccos a + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$ ;  $x = \pm \arccos a + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$



3.  $\operatorname{tg} x = a$ ,  $a$  – любое;  $x = \operatorname{arctg} a + \pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$



4.  $a \cdot \sin x + b \cdot \cos x = c \quad | : \sqrt{a^2 + b^2}$

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot \cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\sin(x + \varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \text{ где } \varphi = \arccos \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \arcsin \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

### Пример

$$\sqrt{3} \sin 3x - \cos 2x = \sqrt{2} \quad | : \sqrt{3+1}; \quad \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x - \frac{1}{2} \cos 2x = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\cos \frac{\pi}{6} \cdot \sin 2x - \sin \frac{\pi}{6} \cdot \cos 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \sin \left( 2x - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$2x - \frac{\pi}{6} = (-1)^k \cdot \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}; \quad 2x = (-1)^k \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z};$$

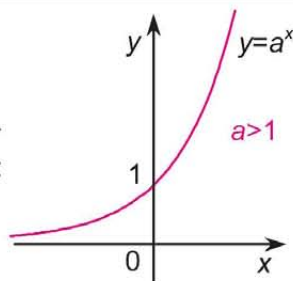
$$x = (-1)^k \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

## Показательная функция

Функция вида  $y=a^x$ , где  $a>0$ ,  $a\neq 1$  – число,  $x$  – независимая переменная называется показательной функцией.

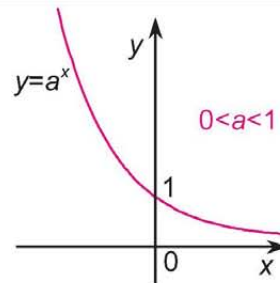
$$y=a^x, a>1$$

- 1) О.О.Ф.  $x\in R$
- 2) О.З.Ф.  $y\in(0;+\infty)$
- 3) нули функции: нет
- 4) знакопостоянство:  
 $y>0$  при  $x\in R$
- 5) монотонность:  
 $y\uparrow$  при  $x\in R$



$$y=a^x, 0<a<1$$

- 1) О.О.Ф.  $x\in R$
- 2) О.З.Ф.  $y\in(0;+\infty)$
- 3) нули функции: нет
- 4) знакопостоянство:  
 $y>0$  при  $x\in R$
- 5) монотонность:  
 $y\downarrow$  при  $x\in R$



**Показательные уравнения** сводятся к решению уравнения  $a^x=b$ ,  
где  $a>0$ ,  $a\neq 1$ ,  $x$  – неизвестное.

если  $b>0$ , то уравнение имеет один корень,  
если  $b\leq 0$ , то уравнение корней не имеет.

**Показательные неравенства** сводятся к решению неравенств вида:  
 $a^x>a^b$  или  $a^x<a^b$ , где  $a>0$ ,  $a\neq 1$ .

Неравенства решаются с помощью свойств возрастания и убывания показательной функции.

если  $a>1$ , то  $a^x>a^b$  или  $a^x<a^b$   
 $x>b$  или  $x<b$

если  $0<a<1$ , то  $a^x>a^b$  или  $a^x<a^b$   
 $x<b$  или  $x>b$

## Логарифмы

Логарифмом положительного  $b$  по основанию  $a$ , где  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ , называется показатель степени, в которую нужно возвести число  $a$  чтобы получить  $b$ .

$$\log_a b = x: a^x = b, a > 0, a \neq 1, b > 0$$

**Основное логарифмическое тождество:**  $a^{\log_a b} = b, b > 0, a > 0, a \neq 1$ .

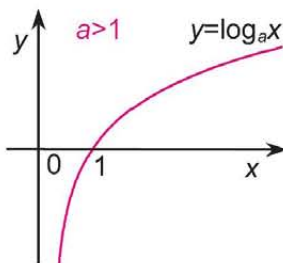
| Свойства логарифмов                            | Примеры                                               |
|------------------------------------------------|-------------------------------------------------------|
| 1. $\log_a a = 1; \log_a 1 = 0$                | $\log_3 \frac{1}{3} = -1; \log_{76} 1 = 0$            |
| 2. $\log_a b + \log_a c = \log_a (bc)$         | $\log_{10} 5 + \log_{10} 2 = \log_{10} 10 = 1$        |
| 3. $\log_a b - \log_a c = \log_a \frac{b}{c}$  | $\log_5 75 - \log_5 3 = \log_5 25 = 2$                |
| 4. $\log_a b^n = n \cdot \log_a b$             | $\log_3 81 = \log_3 3^4 = 4 \log_3 3 = 4 \cdot 1 = 4$ |
| 5. $\log_{a^n} b = \frac{1}{n} \cdot \log_a b$ | $\log_{\sqrt{2}} 2 = 2 \log_2 2 = 2 \cdot 1 = 2$      |
| 6. $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$             | $\log_5 7 = \frac{1}{\log_7 5}$                       |
| 7. $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$      | $\frac{\log_3 125}{\log_3 5} = \log_5 125 = 3$        |

## Логарифмическая функция

Функция вида  $y = \log_a x$ , где  $a > 0$ ,  $a \neq 1$  – число,  $x$  – независимая переменная называется логарифмической функцией.

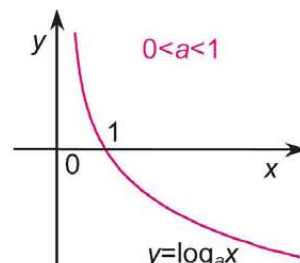
$$y = \log_a x$$

- 1) О.О.Ф.  $x \in (0; +\infty)$
- 2) О.З.Ф.  $y \in \mathbb{R}$
- 3) нули функции:  $x = 1$
- 4) знакопостоянство:  
 $y > 0$ , если  $x \in (1; +\infty)$   
 $y < 0$ , если  $x \in (0; 1)$
- 5) монотонность:  
 $y \uparrow$ , если  $x \in (0; +\infty)$



$$y = \log_a x$$

- 1) О.О.Ф.  $x \in (0; +\infty)$
- 2) О.З.Ф.  $y \in \mathbb{R}$
- 3) нули функции:  $x = 1$
- 4) знакопостоянство:  
 $y > 0$ , если  $x \in (0; 1)$   
 $y < 0$ , если  $x \in (1; +\infty)$
- 5) монотонность:  
 $y \downarrow$ , если  $x \in (0; +\infty)$



**Логарифмические уравнения** сводятся к решению уравнения вида  $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ , где  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ .

$$\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases}$$

**Логарифмические неравенства** сводятся к решению неравенств вида  $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ , или  $\log_a f(x) \leq \log_a g(x)$

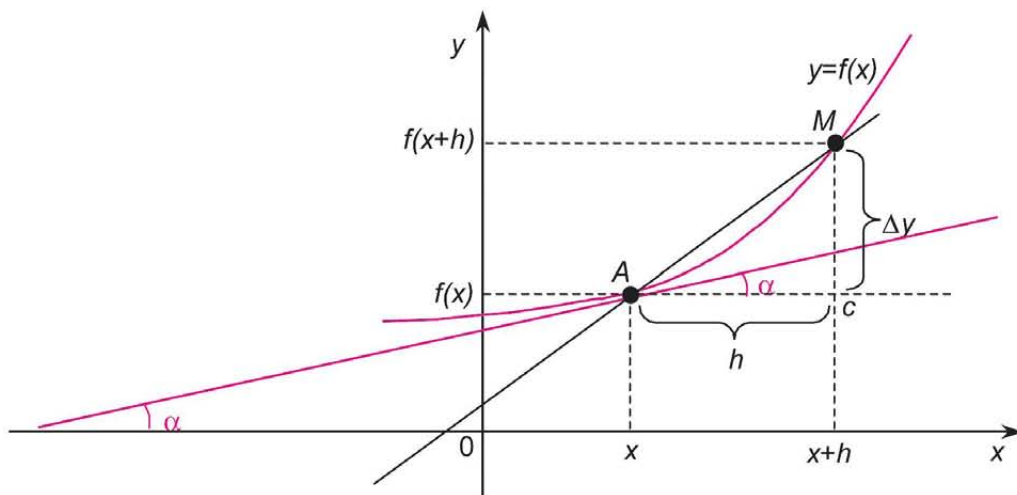
$$\begin{aligned} &\text{если } a > 1, \text{ то } \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) > g(x) \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} f(x) < 0 \\ g(x) < 0 \\ f(x) \leq g(x) \end{cases} \\ &\text{если } 0 < a < 1, \text{ то } \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < g(x) \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} f(x) < 0 \\ g(x) < 0 \\ f(x) \geq g(x) \end{cases} \end{aligned}$$

## Производная

Пусть функция  $y=f(x)$  определена на некотором промежутке,  $x$  – точка этого промежутка и число  $h \neq 0$ , такое, что  $x+h$  также принадлежит этому промежутку. Тогда предел отношения приращения функции  $\Delta y$  к соответствующему приращению аргумента  $h$ , когда  $h \rightarrow 0$ , называются **производной** функции  $y=f(x)$  в точке  $x$ . Обозначается  $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{h}$ , где  $\Delta y = f(x+h) - f(x)$ .

**Геометрический смысл производной** состоит в том, что значение производной функции в точке равно угловому коэффициенту касательной к графику функции в данной точке.

$$f'(x) = \operatorname{tg} \alpha.$$



**Таблица производных**

| Функция                | Производная                    | Пример                                                                                                           |
|------------------------|--------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $c$                    | $0$                            | $(5)'=0; \left(-\frac{2}{7}\right)'=0$                                                                           |
| $ax+b$                 | $a$                            | $(3x-7)'=3; \left(1-\frac{2}{3}x\right)'=-\frac{2}{3}$                                                           |
| $\sqrt{x}$             | $\frac{1}{2\sqrt{x}}$          |                                                                                                                  |
| $\frac{1}{x}$          | $-\frac{1}{x^2}$               |                                                                                                                  |
| $x^n$                  | $n \cdot x^{n-1}$              | $(x^7)'=7x^6; (\sqrt[3]{x^2})'=\left(x^{\frac{2}{3}}\right)'=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ |
| $(ax+b)^n$             | $n \cdot a \cdot (ax+b)^{n-1}$ | $((2x-5)^3)'=3 \cdot 2(2x-5)^2=6(2x-5)^2$                                                                        |
| $e^x$                  | $e^x$                          |                                                                                                                  |
| $a^x$                  | $a^x \cdot \ln a$              | $(7^x)'=7^x \cdot \ln 7$                                                                                         |
| $\ln x$                | $\frac{1}{x}$                  |                                                                                                                  |
| $\log_a x$             | $\frac{1}{x \ln a}$            | $(\log_3 x)'=\frac{1}{x \ln 3}$                                                                                  |
| $\sin x$               | $\cos x$                       |                                                                                                                  |
| $\cos x$               | $-\sin x$                      |                                                                                                                  |
| $\operatorname{tg} x$  | $\frac{1}{\cos^2 x}$           |                                                                                                                  |
| $\operatorname{ctg} x$ | $-\frac{1}{\sin^2 x}$          |                                                                                                                  |



## Правила дифференцирования

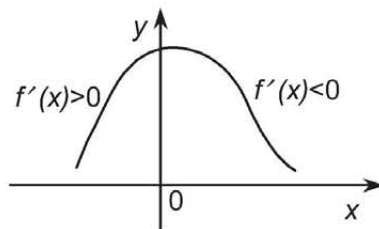
|                                                                   |                                                                                                                                                                                                                                                |
|-------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $(u+v)' = u' + v'$                                                | $(5x^3 - x^8)' = 15x^2 - 8x^7$                                                                                                                                                                                                                 |
| $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$                          | $(x^2 \cdot \cos x)' = (x^2)' \cdot \cos x + x^2 \cdot (\cos x)' = 2x \cos x - x^2 \sin x$                                                                                                                                                     |
| $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$ | $\left(\frac{\sqrt{x}}{\sin x}\right)' = \frac{(\sqrt{x})' \cdot \sin x - \sqrt{x} \cdot (\sin x)'}{\sin^2 x} =$ $= \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} \sin x - \sqrt{x} \cdot \cos x}{\sin^2 x} = \frac{\sin x - 2x \cos x}{2\sqrt{x} \cdot \sin^2 x}$ |
| $(u(v))' = u'(v) \cdot v'$                                        | $(6^{\lg x})' = 6^{\lg x} \cdot \ln 6 \cdot (\lg x)' = \frac{6^{\lg x} \ln 6}{\cos^2 x}$                                                                                                                                                       |

## Уравнение касательной

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0), \text{ где } x_0 - \text{точка касания}$$

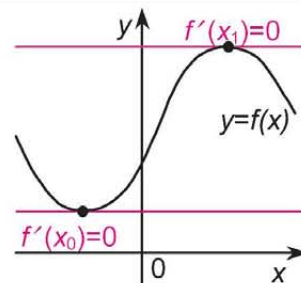
## Применение производной к исследованию функции

1. Если  $f'(x) > 0$  на промежутке,  
то функция  $f(x)$  возрастает на этом промежутке;  
если  $f'(x) < 0$  на промежутке,  
то функция  $f(x)$  убывает на этом промежутке.



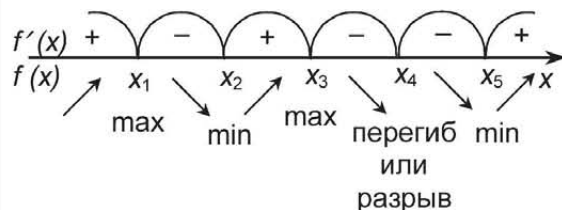
2.  $x_0$  называется **точкой максимума** функции  $f(x)$ ,  
если существует такая окрестность точки  $x_0$ ,  
что для всех  $x$  этой окрестности выполняется неравенство  $f(x) \leq f(x_0)$ .

$x_0$  называется **точкой минимума** функции  $f(x)$ ,  
если существует такая окрестность точки  $x_0$ ,  
что для всех  $x$  этой окрестности выполняется неравенство  $f(x) \geq f(x_0)$ .



Точки минимума и максимума называются **точками экстремума**.

Точки, в которых производная равна нулю, называются **стационарными**.

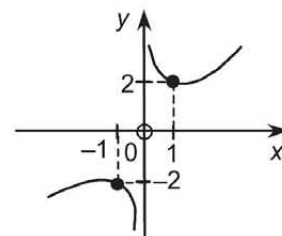
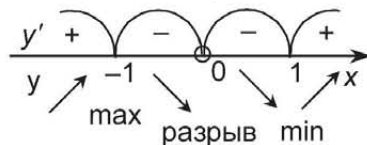


где  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$  – стационарные точки.

**Пример:**  $y = x + \frac{1}{x}$ ,  $x \neq 0$ . Нули функции:  $x + \frac{1}{x} = 0$ , нет корней.

$$y' = 1 - \frac{1}{x^2}$$

$$y' = 0, x^2 - 1 = 0, x_{1,2} = \pm 1$$



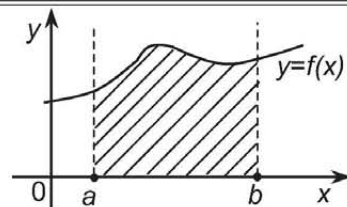
## Первообразная

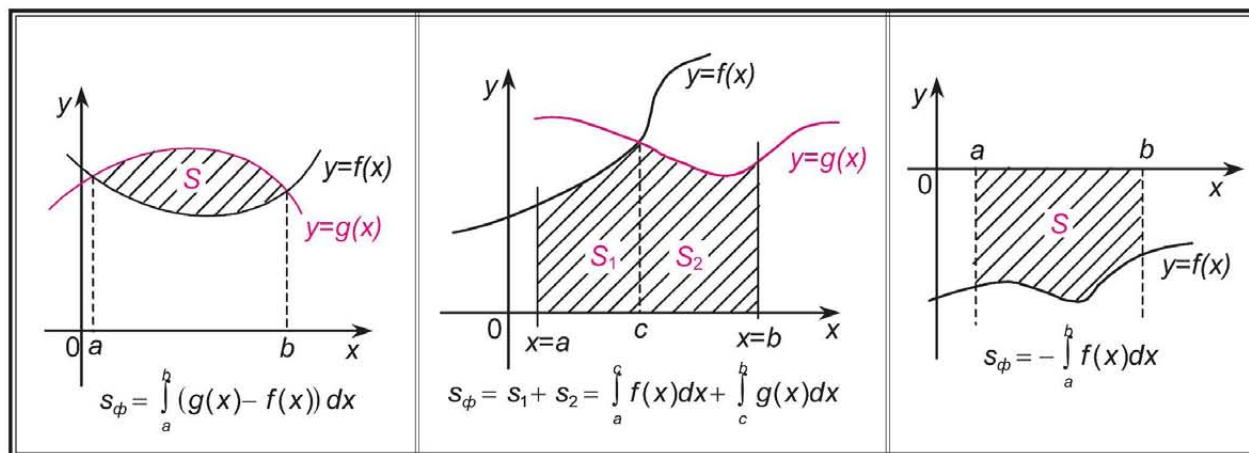
Функция  $c(x)$  называется **первообразной функции  $f(x)$**  на некотором промежутке, если для всех  $x$  из этого промежутка  $c'(x)=f(x)$ .

| Функция                    | Первообразная                 | Пример                                                                                                                                |
|----------------------------|-------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $x^p, p \neq -1$           | $\frac{x^{p+1}}{p+1} + C$     | $f(x) = x^9 \Rightarrow F(x) = \frac{x^{10}}{10} + C$<br>$f(x) = x^{-\frac{1}{3}} \Rightarrow F(x) = \frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}} + C$ |
| $\frac{1}{x}$              | $\ln x + C$                   | $f(x) = \frac{4}{x} \Rightarrow F(x) = 4 \ln x + C$                                                                                   |
| $\frac{1}{kx+b}, k \neq 0$ | $\frac{1}{k} \ln  kx+b  + C$  | $f(x) = \frac{1}{7x+3} \Rightarrow F(x) = \frac{1}{7} \ln  7x+3  + C$                                                                 |
| $e^x$                      | $e^x + C$                     |                                                                                                                                       |
| $e^{kx+b}, k \neq 0$       | $\frac{1}{k} e^{kx+b} + C$    | $f(x) = e^{-x+2} \Rightarrow F(x) = -e^{-x+2} + C$                                                                                    |
| $\sin(kx+b), k \neq 0$     | $-\frac{1}{k} \cos(kx+b) + C$ | $f(x) = \sin(3x-1) \Rightarrow F(x) = -\frac{1}{3} \cos(3x-1) + C$                                                                    |
| $\cos(kx+b), k \neq 0$     | $\frac{1}{k} \sin(kx+b) + C$  | $f(x) = \cos(2-7x) \Rightarrow F(x) = -\frac{1}{7} \sin(2-7x) + C$                                                                    |

## Площадь криволинейной трапеции

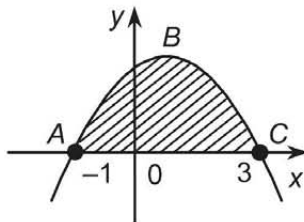
Фигура, ограниченная снизу отрезком  $[a; b]$  оси  $X$ , сверху графиком непрерывной функции  $y=f(x)$ , принимающей положительное значение, а с боков отрезками прямых  $x=a, x=b$ , называется **криволинейной трапецией**.  $S = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$





### Пример

Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиком функции  $y = -x^2 + 2x + 3$  и осью абсцисс.



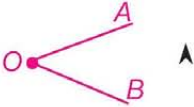
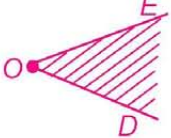
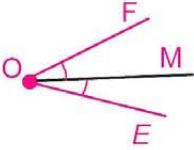
$$\begin{aligned}
 S_{ABC} &= \int_{-1}^3 (-x^2 + 2x + 3) dx = \\
 &= -\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x \Big|_{-1}^3 = \\
 &= \left(-\frac{1}{3} \cdot 27 + 9 + 9\right) - \left(-\frac{1}{3} \cdot (-1) + 1 - 3\right) = \\
 &= 9 - \frac{1}{3} + 2 = 10\frac{2}{3} \text{ (ед}^2\text{)}
 \end{aligned}$$

# Геометрия

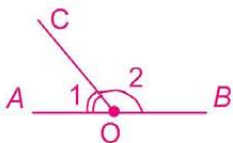
В переводе с греческого означает «землемерие». Основные элементы: точка, прямая, плоскость.

**Аксиома** – утверждение, которое не требует доказательств.

**Теорема** – утверждение, истинность которого устанавливается путем доказательства.

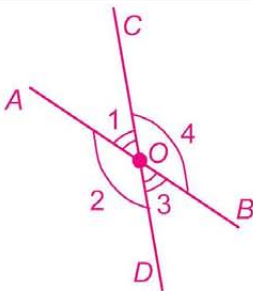
|                                                                                    |                                                                                                                                                                                                                                       |
|------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|   | <p><b>Отрезок</b> – часть прямой, ограниченная двумя точками.<br/>Обозначается: <math>AB</math> или <math>BA</math>.</p>                                                                                                              |
|   | <p><b>Луч</b> – часть прямой, ограниченная с одной стороны.<br/>Обозначается <math>CD</math> или <math>a</math>.</p>                                                                                                                  |
|   | <p><b>Угол</b> – геометрическая фигура, состоящая из двух различных лучей, выходящих из одной точки, которая называется вершиной угла, а лучи – сторонами угла. Обозначается <math>\angle AOB</math> или <math>\angle BOA</math>.</p> |
|   | <p><b>Плоский угол</b> – часть плоскости, ограниченная двумя лучами, выходящими из одной точки.<br/>Обозначается <math>\angle EOD</math> или <math>\angle DOE</math>.</p>                                                             |
|   | <p><b>Середина отрезка</b> – точка, делящая отрезок пополам.<br/>Обозначается <math>E \in AB</math>, <math>AE = EB</math>.</p>                                                                                                        |
|  | <p><b>Биссектриса угла</b> – луч, исходящий из вершины угла и делящий его на два равных угла.<br/><math>OM</math> – биссектриса, <math>\angle FOM = \angle EOM</math></p>                                                             |

## Смежные углы и их свойство

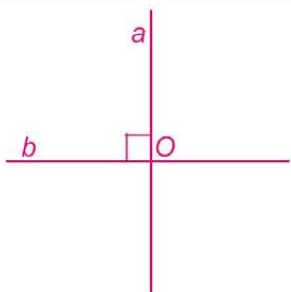


Два угла, у которых одна сторона общая, а две другие являются продолжениями одна другой, называются **смежными углами**.  
Смежные углы в сумме составляют  $180^\circ$ .  
 $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$

## Вертикальные углы и их свойство

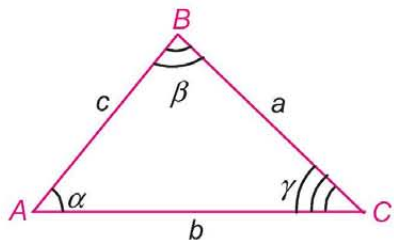


Два угла называются **вертикальными**, если стороны одного угла являются продолжениями сторон другого.  
Вертикальные углы равны  $\angle 1 = \angle 3$ ,  $\angle 2 = \angle 4$ .



**Перпендикулярные прямые** – две пересекающиеся прямые, образующие при пересечении прямые углы.  
Обозначение  $a \perp b$ .

## Треугольники



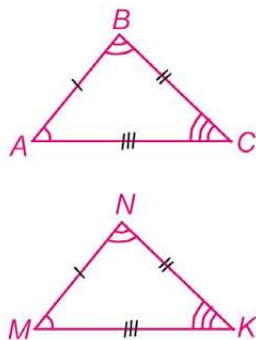
**Треугольник** – геометрическая фигура, образованная тремя точками, не лежащими на одной прямой, и тремя попарно соединенными отрезками.

Точки называются **вершинами** треугольника.

Отрезки называются **сторонами** треугольника.

Углы, образованные отрезками, выходящими из вершин треугольниками, называются **углами** треугольника.

Обозначение:  $\triangle ABC$  или  $\triangle BCA$  или  $\triangle CAB$ .

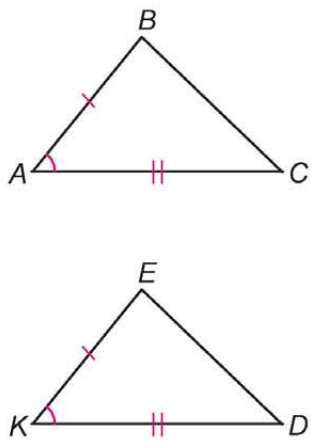
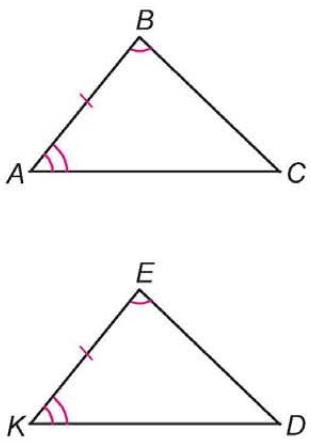
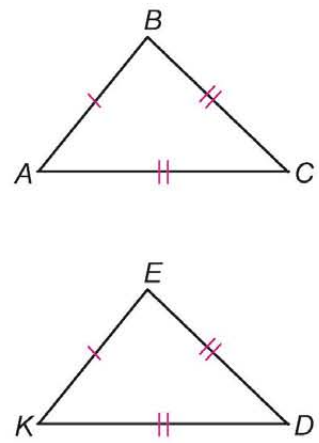


Два треугольника называются **равными**, если три стороны и три угла одного треугольника соответственно равны трем сторонам и трем углам другого треугольника.

Если  $AB=MN$ ;  $BC=NK$ ;  $AC=MK$ ;  $\angle A=\angle M$ ;  $\angle B=\angle N$ ;  $\angle C=\angle K$ , то  $\triangle ABC=\triangle MNK$ .



## Признаки равенства треугольников

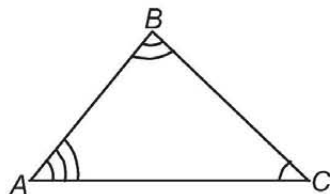
| <b>I признак</b><br>(по двум сторонам<br>и углу между ними)                                                                                                                                                           | <b>II признак</b><br>(по стороне и двум<br>прилежающим углам)                                                                                                                                                                     | <b>III признак</b><br>(по трем сторонам)                                                                                                                                                                    |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>Если <math>AB=KE</math>, <math>AC=KD</math>,<br/><math>\angle A=\angle K</math>, то <math>\triangle ABC=\triangle KED</math></p>  | <p>Если <math>AB=KE</math>, <math>\angle A=\angle K</math>,<br/><math>\angle B=\angle E</math>, то <math>\triangle ABC=\triangle KED</math></p>  | <p>Если <math>AB=KE</math>, <math>AC=KD</math>,<br/><math>BC=ED</math>, то <math>\triangle ABC=\triangle KED</math></p>  |
| <p style="text-align: center;">Значит, для того чтобы утверждать, что два треугольника равны,<br/>достаточно знать равенство трех пар соответствующих элементов.</p>                                                  |                                                                                                                                                                                                                                   |                                                                                                                                                                                                             |



## Типы треугольников

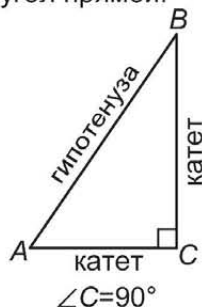
## По углам

Треугольник называется **остроугольным**, если все углы острые.



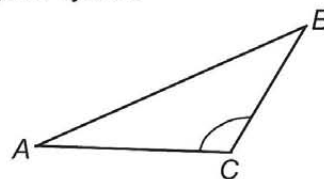
$$\angle A < 90^\circ, \angle B < 90^\circ, \angle C < 90^\circ$$

Треугольник называется **прямоугольным**, если один угол прямой.



$$\angle C = 90^\circ$$

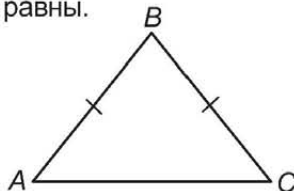
Треугольник называется **тупоугольным**, если один угол тупой.



$$90^\circ < \angle C < 180^\circ$$

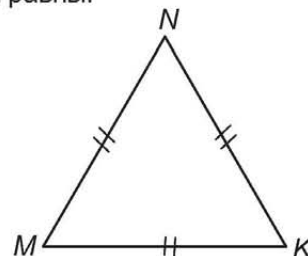
## По сторонам

Треугольник называется **равнобедренным**, если две стороны равны.

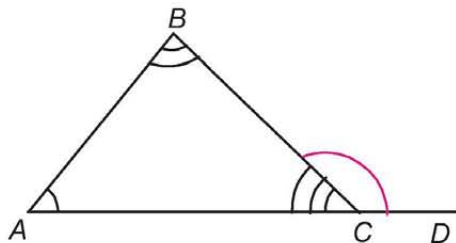


$AB=BC$  – равные стороны, называются боковыми сторонами;  $AC$  – называется основанием треугольника.

Треугольник называется **равносторонним**, если все стороны равны.



$$MN=NK=MK.$$



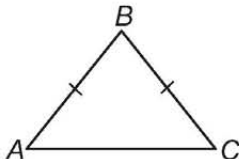
- Сумма углов любого треугольника равна  $180^\circ$ .  
 $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$
- Внешний угол треугольника – угол, смежный с каким-нибудь углом данного треугольника.  
 $\angle BCD$  – внешний угол  $\triangle ABC$  при вершине C.
- Внешний угол треугольника равен сумме двух углов треугольника, не смежных с ним.  
 $\angle BCD = \angle A + \angle B$
- В треугольнике против большей стороны лежит больший угол, и обратно, против большего угла лежит большая сторона.
- Каждая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон.

$AB < AC + BC$ ;  $BC < AB + AC$ ;  $AC < AB + BC$  – неравенство треугольника

#### Свойство равнобедренного треугольника

В равнобедренном треугольнике углы при основании равны.

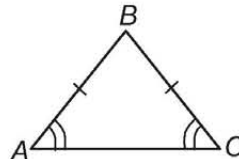
Если  $AB = BC$ , то  $\angle A = \angle C$

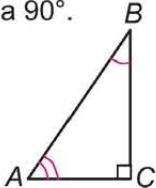
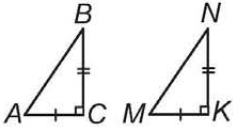
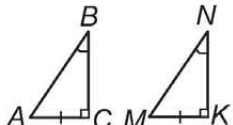
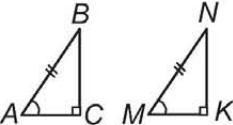
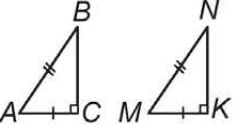


#### Признак равнобедренного треугольника

Если два угла треугольника равны, то треугольник равнобедренный.

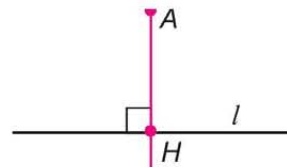
Если  $\angle A = \angle C$ , то  $AB = BC$ .



| Свойства прямоугольного треугольника                                                                                                                                                                                                                                                                 | Признаки прямоугольного треугольника                                                                                                                                                                                                                              |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>1. Сумма острых углов равна <math>90^\circ</math>.<br/> <math>\angle A + \angle C = 90^\circ</math></p>                                                                                                          | <p>1. По двум катетам:<br/>         Если <math>AC = MK</math>, <math>BC = NK</math>,<br/>         то <math>\triangle ABC = \triangle MNK</math>.</p>                           |
| <p>2. Катет, лежащий против угла в <math>30^\circ</math>, равен половине гипотенузы.<br/>         Если <math>\angle A = 30^\circ</math>, то <math>BC = \frac{1}{2} AB</math>.<br/>         Если <math>\angle B = 30^\circ</math>, то <math>AC = \frac{1}{2} AB</math>.</p>                           | <p>2. По катету и острому углу:<br/>         Если <math>AC = MK</math>, <math>\angle B = \angle N</math>,<br/>         то <math>\triangle ABC = \triangle MNK</math>.</p>      |
| <p>3. Если катет равен половине гипотенузы, то угол, лежащий против этого катета, равен <math>30^\circ</math>.<br/>         Если <math>AC = \frac{1}{2} AB</math>, то <math>\angle B = 30^\circ</math>.<br/>         Если <math>BC = \frac{1}{2} AB</math>, то <math>\angle A = 30^\circ</math>.</p> | <p>3. По гипотенузе и острому углу:<br/>         Если <math>AB = MN</math>, <math>\angle A = \angle M</math>,<br/>         то <math>\triangle ABC = \triangle MNK</math>.</p>  |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | <p>4. По катету и гипотенузе:<br/>         Если <math>AC = MK</math>, <math>AB = MN</math>,<br/>         то <math>\triangle ABC = \triangle MNK</math>.</p>                   |
| <p>Значит, для того чтобы утверждать, что два прямоугольных треугольника равны, достаточно знать равенство двух пар соответствующих элементов.</p>                                                                                                                                                   |                                                                                                                                                                                                                                                                   |

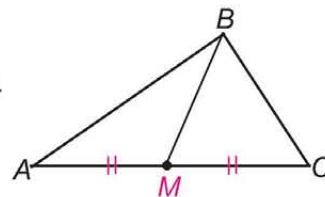
**Перпендикуляр** – отрезок, проведенный из точки к прямой под прямым углом.

$AM$  – перпендикуляр к прямой  $l$ ,  $AM \perp l$



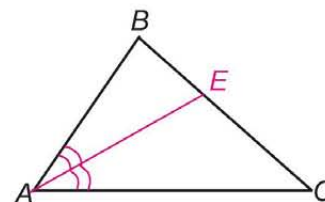
**Медиана треугольника** – отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны треугольника.

$BM$  – медиана,  $AM = MC$



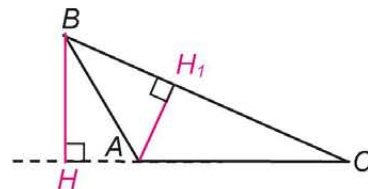
**Биссектриса угла треугольника** – отрезок биссектрисы угла, соединяющий вершину треугольника с точкой противоположной стороны треугольника.

$AE$  – биссектриса,  $\angle BAE = \angle CAE$



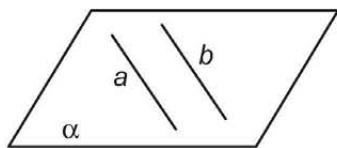
**Высота треугольника** – перпендикуляр, проведенный из вершины треугольника к прямой, содержащей противоположную сторону треугольника.

$BH \perp AC$ ,  $AH_1 \perp BC$ ,  $BH$  и  $AH_1$  – высоты.



## Параллельные прямые

Две прямые на плоскости называются **параллельными**, если они не пересекаются.



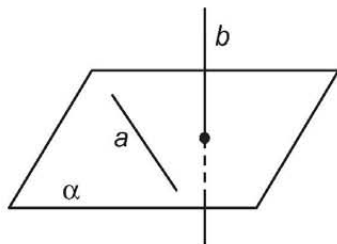
Если  $a \in \alpha$ ,  $b \in \alpha$ ,  $a \not\cap b$ , то  $a \parallel b$ .

то есть для того, чтобы утверждать, что прямые параллельны, необходимо чтобы оба условия выполнялись:

- 1) обе прямые лежали в одной плоскости
- 2) обе прямые не имели общих точек.

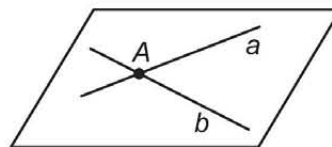
выполняется только 2-е условие:

Если  $a \in \alpha$ ,  $b \notin \alpha$ ,  $a \not\cap b$ , то  $a \not\parallel b$



выполняется только 1-е условие:

Если  $a \in \alpha$ ,  $b \in \alpha$ ,  $a \cap b = A$ , то  $a \not\parallel b$



При пересечении прямых  $a$  и  $b$  секущей  $c$  получим 8 углов:

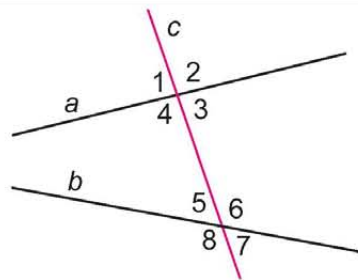
$\angle 3$  и  $\angle 5$ ;  $\angle 4$  и  $\angle 6$  – внутренние накрест лежащие углы;

$\angle 1$  и  $\angle 7$ ;  $\angle 2$  и  $\angle 8$  – внешние накрест лежащие углы;

$\angle 4$  и  $\angle 5$ ;  $\angle 3$  и  $\angle 6$  – внутренние односторонние углы;

$\angle 1$  и  $\angle 8$ ;  $\angle 2$  и  $\angle 7$  – внешние односторонние углы;

$\angle 1$  и  $\angle 5$ ;  $\angle 4$  и  $\angle 8$ ;  $\angle 2$  и  $\angle 6$ ;  $\angle 3$  и  $\angle 7$  – соответственные углы.



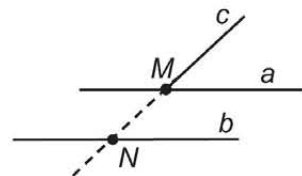
**Аксиома параллельных прямых:**

Через точку, не лежащую на данной прямой, проходит только одна прямая, параллельная данной.

**Следствие:**

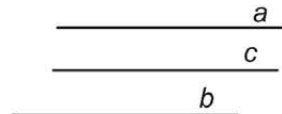
1. Если прямая пересекает одну из двух параллельных прямых, то она пересекает и другую прямую.

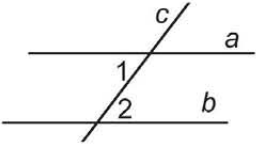
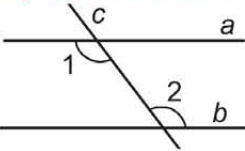
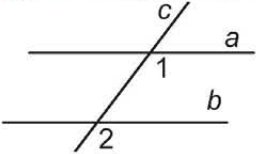
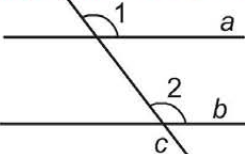
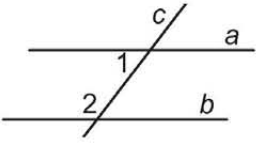
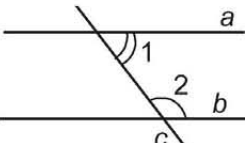
Если  $a \parallel b$ ,  $a \cap c = M$ , то  $b \cap c = N$



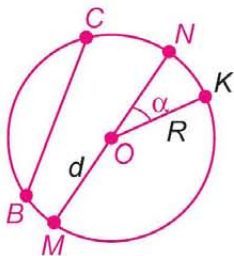
2. Если две прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны друг другу.

Если  $a \parallel c$  и  $b \parallel c$ , то  $a \parallel b$ .



| Свойства параллельных прямых                                                                                                                                                                                                                                                                                             | Признаки параллельных прямых                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>1. Если две параллельные прямые пересечены секущей, то накрест лежащие углы равны.<br/>Если <math>a \parallel b</math>, <math>c</math> – секущая, то <math>\angle 1 = \angle 2</math></p>                                            | <p>1. Если при пересечении двух прямых секущей накрест лежащие углы равны, то прямые параллельны.<br/>Если <math>c</math> – секущая, <math>\angle 1 = \angle 2</math>, то <math>a \parallel b</math>.</p>                                           |
| <p>2. Если две параллельные прямые пересечены секущей, то соответственные углы равны.<br/>Если <math>a \parallel b</math>, <math>c</math> – секущая, то <math>\angle 1 = \angle 2</math>.</p>                                           | <p>2. Если при пересечении двух прямых секущей соответственные углы равны, то прямые параллельны.<br/>Если <math>c</math> – секущая, <math>\angle 1 = \angle 2</math>, то <math>a \parallel b</math>.</p>                                           |
| <p>3. Если две параллельные прямые пересечены секущей, то сумма односторонних углов равна <math>180^\circ</math>.<br/>Если <math>a \parallel b</math>, <math>c</math> – секущая, то <math>\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ</math>.</p>  | <p>3. Если при пересечении двух прямых секущей сумма односторонних углов равна <math>180^\circ</math>, то прямые параллельны.<br/>Если <math>c</math> – секущая, <math>\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ</math>, то <math>a \parallel b</math>.</p>  |





**Окружность** – геометрическая фигура, состоящая из всех точек плоскости, равноудаленных от данной точки, которая называется центром окружности.

**Радиус** – отрезок, соединяющий центр окружности с любой точкой окружности; обозначается  $R$  или  $r$ .

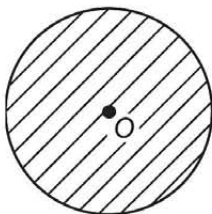
**Хорда** – отрезок, соединяющий две точки окружности.

**Диаметр** – хорда, проходящая через центр окружности; обозначается  $d$ ,  $d=2r$ .

(Длина окружности  $C=2\pi R$ ).

**Дуга** – часть окружности, ограниченная двумя точками.

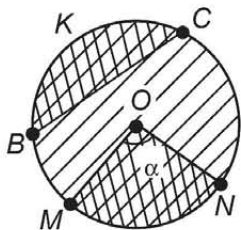
$$(\cup NK = \frac{\pi R \cdot \alpha}{180^\circ}).$$



**Круг** – часть плоскости, ограниченная окружностью.

Радиус, хорда, диаметр круга определяются так же, как и у окружности.

(Площадь круга  $S=\pi R^2$ .)



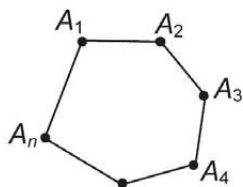
**Сегмент** ( $BCK$ ) – часть круга, отсекаемая хордой  $BC$ .

**Сектор** ( $MON$ ) – часть круга, вырезаемая двумя радиусами  $OM$  и  $ON$ .

$$(\text{Площадь сектора } S_{MON} = \frac{\pi R^2 \cdot \alpha}{360^\circ})$$



## Многоугольники



Простая замкнутая ломаная называется **многоугольником**.

Звенья ломаной – **стороны многоугольника**.

Концы звеньев – **вершины многоугольника**.

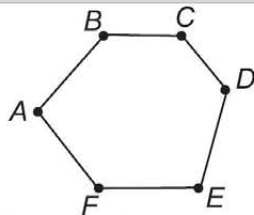
$A_1A_2A_3...A_n$  –  $n$ -угольник,  $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$  – вершины,

$A_1A_2, A_2A_3, ..., A_nA_1$  – стороны.

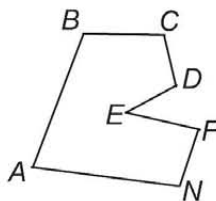
Отрезки, соединяющие несоседние вершины, называются **диагоналями** многоугольника.

\* Многоугольник называется **выпуклым**, если он лежит по одну сторону от каждой прямой, проходящей через две его соседние вершины.

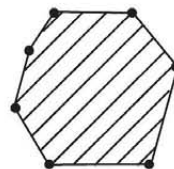
\* **Плоским** многоугольником называется многоугольник с его внутренней областью.



Выпуклый многоугольник



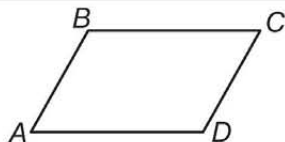
Не является выпуклым многоугольником



Плоский многоугольник

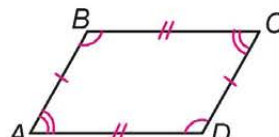
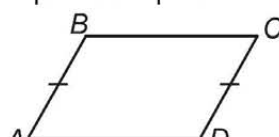
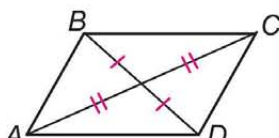
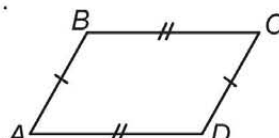
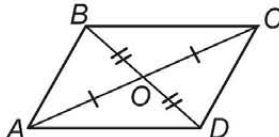
Сумма углов выпуклого  $n$ -угольника равна  $180^\circ \cdot (n-2)$ .

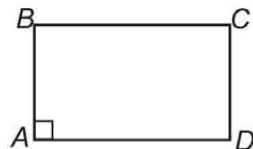
Сумма внешних углов  $n$ -угольника, взятых по одному при каждой вершине, равна  $360^\circ$ .



**Параллелограмм** – четырехугольник, стороны которого попарно параллельны.

Если  $AB \parallel CD, BC \parallel AD$ , то  $ABCD$  – параллелограмм.

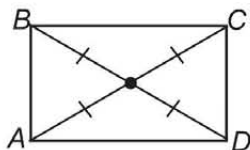
| Свойства параллелограмма                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | Признаки параллелограмма                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>1. В параллелограмме противоположные стороны и противоположные углы равны.</p>  <p>Если <math>ABCD</math> – параллелограмм, то <math>AB=CD</math>, <math>BC=AD</math>, <math>\angle A=\angle C</math>, <math>\angle B=\angle D</math>.</p> | <p>1. Если в четырехугольнике две стороны равны и параллельны, то этот четырехугольник – параллелограмм.</p>  <p>Если <math>AB \parallel CD</math>, <math>AB=CD</math>, то <math>ABCD</math> – параллелограмм.</p>                                  |
| <p>2. Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам.</p>  <p>Если <math>ABCD</math> – параллелограмм, <math>AC \cap BD = O</math>, то <math>AO=OC</math>, <math>BO=OD</math>.</p>                                              | <p>2. Если в четырехугольнике стороны попарно равны, то этот четырехугольник – параллелограмм.</p>  <p>Если <math>AB=CD</math>, <math>BC=AD</math>, то <math>ABCD</math> – параллелограмм.</p>                                                      |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | <p>3. Если в четырехугольнике диагонали в точке пересечения делятся пополам, то этот четырехугольник – параллелограмм.</p>  <p>Если <math>AB \cap CD = O</math>, <math>AO=OC</math>, <math>BO=OD</math>, то <math>ABCD</math> – параллелограмм.</p> |



**Прямоугольник** – параллелограмм, у которого все углы прямые.  
 Если  $AB \parallel CD$ ,  $BC \parallel AD$ ,  $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90^\circ$ ,  $ABCD$  – прямоугольник.

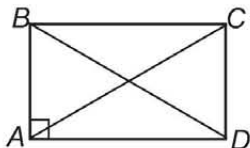
### Свойства прямоугольника

1. Прямоугольник обладает всеми свойствами параллелограмма, то есть противоположные стороны равны, диагонали в точке пересечения делятся пополам.



Если  $ABCD$  – прямоугольник, то  $AB=CD$ ;  
 $BC=AD$ ;  $AO=OC$ ;  $BO=OD$ .

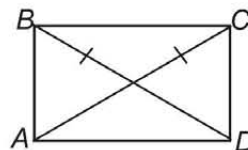
2. Диагонали прямоугольника равны.



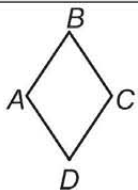
Если  $ABCD$  – прямоугольник, то  $AC=BD$ .

### Признак прямоугольника

Если в параллелограмме диагонали равны, то этот параллелограмм – прямоугольник.



Если  $ABCD$  – параллелограмм,  $AC=BD$ , то  $ABCD$  – прямоугольник.

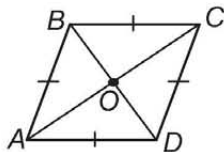


**Ромб** – параллелограмм, у которого все стороны равны.

Если  $AB \parallel CD$ ,  $BC \parallel AD$ ,  $AB=BC=CD=AD$  то  $ABCD$  – ромб.

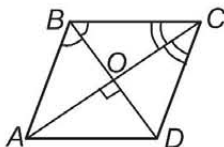
### Свойства ромба

1. Ром обладает всеми свойствами параллелограмма, то есть противоположные углы равны, диагонали в точке пересечения делятся пополам.



Если  $ABCD$  – ромб, то  $\angle A = \angle C$ ,  $\angle B = \angle D$ ,  $AO = OC$ ,  $BO = OD$ .

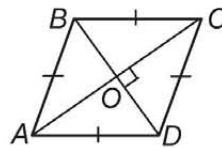
2. Диагонали ромба взаимно перпендикулярны и делят его углы пополам.



Если  $ABCD$  – ромб, то  $AC \perp BD$ ,  $\angle BCA = \angle DCA$ ,  $\angle ABD = \angle CBD$ .

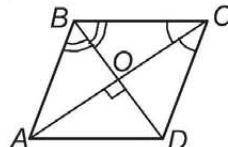
### Признаки ромба

1. Если в параллелограмме диагонали взаимно перпендикулярны, то этот параллелограмм – ромб.

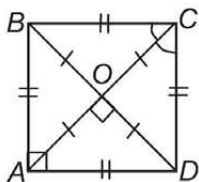


Если  $ABCD$  – параллелограмм,  $AC \perp BD$ , то  $ABCD$  – ромб.

2. Если в параллелограмме диагонали являются биссектрисами углов, то этот параллелограмм – ромб.

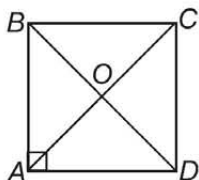


Если  $ABCD$  – параллелограмм,  $\angle BCA = \angle DCA$ ,  $\angle ABD = \angle CBD$ , то  $ABCD$  – ромб.



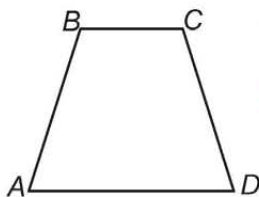
**Квадрат** – прямоугольник, у которого все стороны равны. Или: квадрат – ромб, у которого все углы – прямые.

Если  $AB \parallel CD$ ,  $BC \parallel AD$ ,  $AB=BC$ ,  $\angle A=90^\circ$  то  $ABCD$  – квадрат.



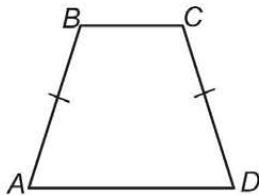
Квадрат обладает всеми свойствами прямоугольника и ромба:

1.  $AB=BC=CD=AD$
2.  $\angle A=\angle B=\angle C=\angle D=90^\circ$
3.  $AC=BD$
4.  $AC \perp BD$ ,  $\angle BCA=\angle DCA$ ,  $\angle ABD=\angle CBD$
5.  $BO=OD=AO=OC$



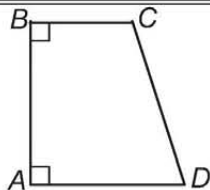
**Трапеция** – четырехугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие стороны не параллельны.

Если  $BC \parallel AD$ ;  $AB \nparallel CD$ , то  $ABCD$  – трапеция.

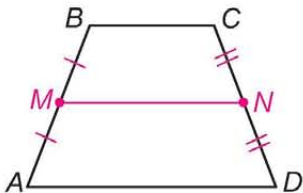


Трапеция называется **равнобедренной**, если боковые стороны равны.

$AB=CD$ .



Трапеция называется **прямоугольной**, если боковая сторона перпендикулярна основаниям.



**Средняя линия трапеции** – отрезок, соединяющий середины боковых сторон.  $MN$  – средняя линия трапеции  $ABCD$ . Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна полусумме оснований.

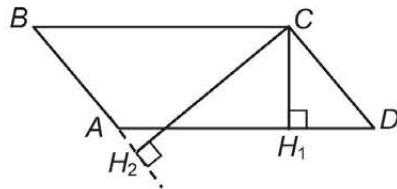
$$MN \parallel AD \parallel BC \text{ и } MN = \frac{1}{2}(AD + BC).$$

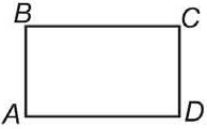
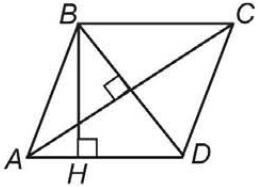
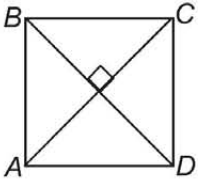
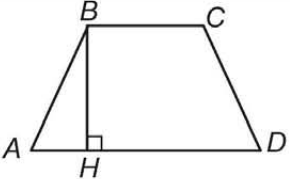
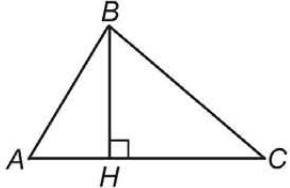
## Площади многоугольников

Площадь – положительное число

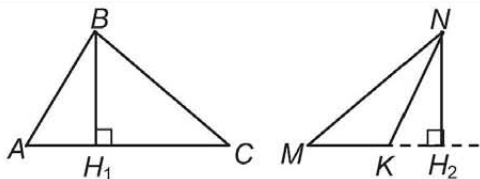
1. Единица измерения площади – квадрат, сторона которого равна единице измерения отрезков.
2. Площади равных фигур равны.
3. Площадь фигуры, составленной из нескольких частей, равна сумме площадей этих частей.

1) **Параллелограмм**:  $S = AD \cdot CH_1$  или  $S = AB \cdot CH_2$ .  
Площадь параллелограмма равна произведению основания на высоту.



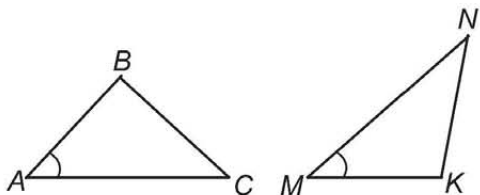
|                                                                                                                                                                               |                                                                                      |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>2) <b>Прямоугольник:</b> <math>S=AB \cdot BC</math>.<br/>Площадь прямоугольника равна произведению его смежных сторон.</p>                                                 |   |
| <p>3) <b>Ромб:</b> <math>S=AD \cdot BH</math> (как параллелограмм), <math>S=\frac{1}{2} AC \cdot BD</math>.<br/>Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей.</p> |   |
| <p>4) <b>Квадрат:</b> <math>S=AB^2</math> (как прямоугольник), <math>S=\frac{1}{2} AC^2</math> (как ромб).</p>                                                                |   |
| <p>5) <b>Трапеция:</b> <math>S=\frac{1}{2}(BC+AD) \cdot BH</math>.<br/>Площадь трапеции равна произведению полусуммы ее оснований на высоту.</p>                              |   |
| <p>6) <b>Треугольник:</b> <math>S=\frac{1}{2} AC \cdot BH</math>.<br/>Площадь треугольника равна половине произведения основания на высоту.</p>                               |  |





• Если высоты двух треугольников равны, то их площади относятся как основания.

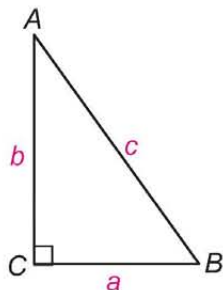
Если  $BH_1 = NH_2$ , то  $\frac{S_{ABC}}{S_{MNK}} = \frac{AC}{MK}$



• Если угол одного треугольника равен углу другого треугольника, то площади этих треугольников относятся как произведения сторон, заключающих равные углы.

Если  $\angle A = \angle M$ , то  $\frac{S_{ABC}}{S_{MNK}} = \frac{AB \cdot AC}{MN \cdot MK}$

## Теорема Пифагора

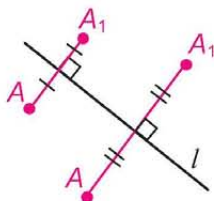


Квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов  $c^2 = a^2 + b^2$ .  
Обратно: если квадрат одной стороны равен сумме квадратов двух других сторон, то треугольник прямоугольный.

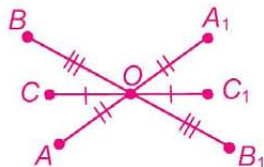


## Симметрия

### Осевая симметрия



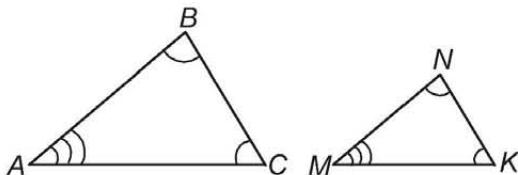
Точки  $A$  и  $A_1$  называются симметричными относительно прямой  $l$ , если эта прямая  $l$  проходит через середину отрезка  $AA_1$  и перпендикулярна ему. Каждая точка прямой  $l$  считается симметричной самой себе.



### Центральная симметрия

Точки  $B$  и  $B_1$  называются симметричными относительно точки  $O$ , если  $O$  – середина отрезка  $BB_1$ . Точка  $O$  считается симметричной самой себе.

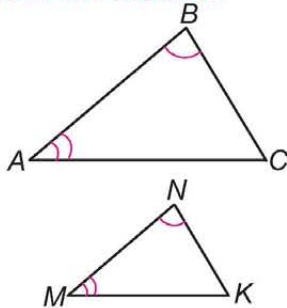
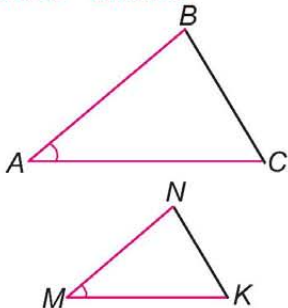
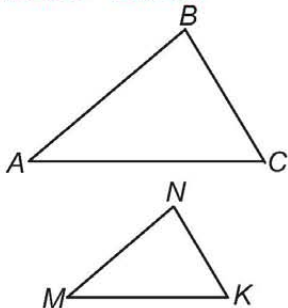
## Подобные треугольники



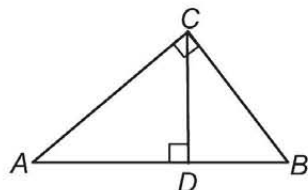
Два треугольника называются **подобными**, если их углы соответственно равны и стороны одного треугольника пропорциональны сходственным сторонам другого.

Если  $\angle A = \angle M$ ,  $\angle B = \angle N$ ,  $\angle C = \angle K$ ,  $\frac{AB}{MN} = \frac{BC}{NK} = \frac{AC}{MK}$ , то  $\triangle ABC \sim \triangle MNK$

## Признаки подобия треугольников

| I признак (по двум углам)                                                                                                                                                                                               | II признак (по двум сторонам и углу между ними)                                                                                                                                                                                   | III признак (по трем сторонам)                                                                                                                                                                                    |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>Если <math>\angle A = \angle M</math>, <math>\angle B = \angle N</math>,<br/>то <math>\triangle ABC \sim \triangle MNK</math>.</p>  | <p>Если <math>\angle A = \angle M</math>, <math>\frac{AB}{MN} = \frac{AC}{MK}</math>,<br/>то <math>\triangle ABC \sim \triangle MNK</math>.</p>  | <p>Если <math>\frac{AB}{MN} = \frac{BC}{NK} = \frac{AC}{MK}</math>,<br/>то <math>\triangle ABC \sim \triangle MNK</math>.</p>  |

Отрезок  $XY$  называется средним пропорциональным (или средним геометрическим) между отрезками  $AB$  и  $CD$ , если  $XY = \sqrt{AB \cdot CD}$ .

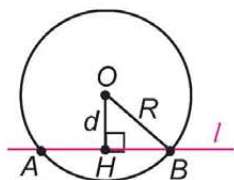


- 1) Высота прямоугольного треугольника, опущенная на гипотенузу, есть среднее пропорциональное между отрезками, на которые делится гипотенуза этой высотой.  $CD = \sqrt{AD \cdot DB}$ .
- 2) Катет прямоугольного треугольника есть среднее пропорциональное между гипотенузой и отрезком гипотенузы, заключенным между катетом и высотой, проведенной из вершины прямого угла.  
 $AC = \sqrt{AB \cdot AD}$ ;  $BC = \sqrt{AB \cdot DB}$ .

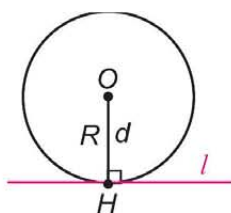
## Касательная к окружности

### Взаимное расположение прямой на плоскости

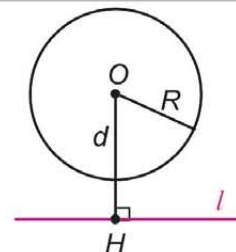
$R$  – радиус окружности;  $d$  – расстояние от центра окружности до прямой.



Если  $d < R$ , то окружность и прямая пересекаются. Имеют 2 общих точки.



Если  $d = R$ , то окружность и прямая касаются. Имеют 1 общую точку.

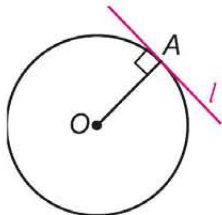


Если  $d > R$ , то окружность и прямая не пересекаются. Не имеют общих точек.

#### Свойство касательной к окружности

Касательная к окружности перпендикулярна к радиусу, проведенному в точку касания.

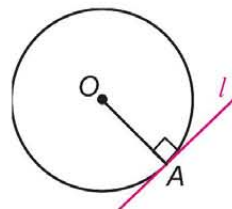
Если  $l$  – касательная,  $A$  – точка касания, то  $OA \perp l$ .

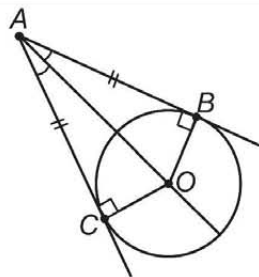


#### Признак касательной к окружности

Если прямая проходит через конец радиуса, лежащий на окружности, и перпендикулярна к этому радиусу, то она является касательной.

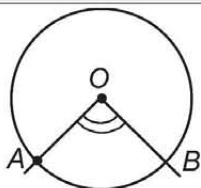
Если  $OA \cap l = A$  и  $OA \perp l$ , то  $l$  – касательная.





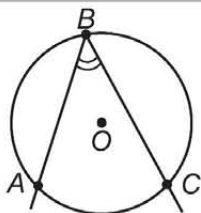
Отрезки касательных к окружности, проведенные из одной точки, равны и составляют равные углы с прямой, проходящей через эту точку и центр окружности.

Если  $AB, AC$  – касательные, то  $AB=AC$ ,  $\angle BAO=\angle CAO$ .



Угол, вершина которого лежит в центре окружности, а стороны пересекают ее, называется **центральный** углом.

$\angle AOB$  – центральный,  $\angle AOB = \overset{\frown}{AB}$ .

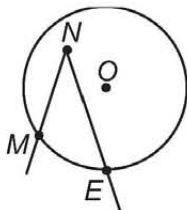


Угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают ее, называется **вписанным** углом.

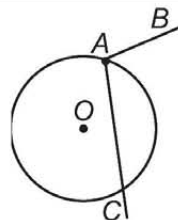
То есть для того чтобы утверждать, что угол вписан в окружность, необходимо, чтобы выполнялись оба условия:

- 1) вершина лежит на окружности;
- 2) стороны угла пересекают окружность.

- 1)  $N \notin \text{Окр.}(O; R)$
  - 2)  $MN \cap \text{Окр.}(O; R)$  и  $NE \cap \text{Окр.}(O; R)$
- $\angle MNE$  – не является вписанным углом

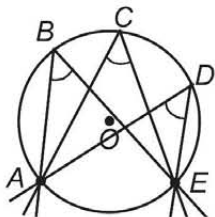


- 1)  $A \in \text{Окр.}(O; R)$
  - 2)  $AC \cap \text{Окр.}(O; R)$  и  $AB \not\cap \text{Окр.}(O; R)$
- $\angle BAC$  – не является вписанным углом

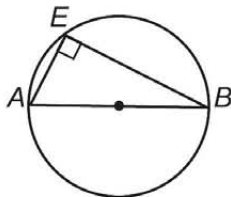


Вписанный угол равен половине дуги, на которую он опирается  $\angle ABC = \frac{1}{2} \cup AC$ .

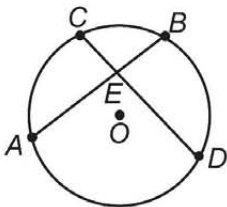
### Свойства вписанных углов



- вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны.  
 $\angle ABE = \angle ACE = \angle ADE$

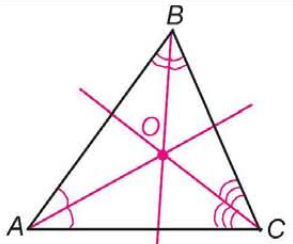
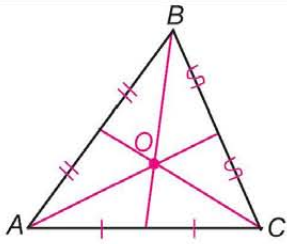
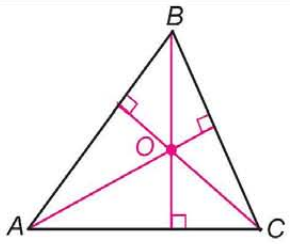
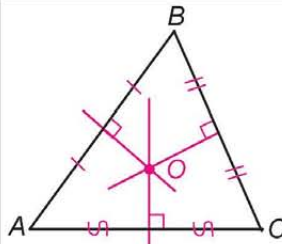


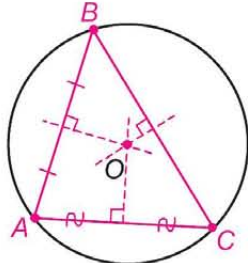
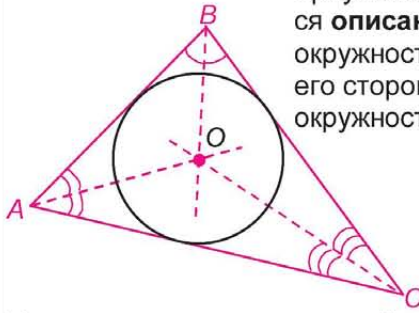
- вписанный угол, опирающийся на полуокружность, – прямой.  
Если  $AB$  – диаметр окружности, то  $\angle AEB = 90^\circ$



- Если две хорды окружности пересекаются, то произведение отрезков одной хорды равно произведению отрезков другой хорды.  
Если  $AB \cap CD = E$ , то  $AE \cdot EB = CE \cdot ED$

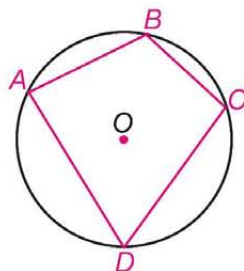
## Четыре замечательные точки треугольника

|                                                                                                                                                          |                                                                                                                                                      |                                                                                                                                                      |                                                                                                                                                                               |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|  <p>Биссектрисы<br/>треугольника<br/>пересекаются<br/>в одной точке</p> |  <p>Медианы<br/>треугольника<br/>пересекаются<br/>в одной точке</p> |  <p>Высоты<br/>треугольника<br/>пересекаются<br/>в одной точке</p> |  <p>Серединные<br/>перпендикуляры<br/>треугольника<br/>пересекаются<br/>в одной точке.</p> |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p style="text-align: center;"><b>Треугольник,<br/>вписанный в окружность</b></p>  <p>Треугольник называется <b>вписанным</b> в окружность, если все его вершины лежат на окружности.</p> <p>Центр окружности, описанной около треугольника, лежит на пересечении серединных перпендикуляров.</p> | <p style="text-align: center;"><b>Треугольник,<br/>описанный вокруг окружности</b></p>  <p>Треугольник называется <b>описанным</b> около окружности, если все его стороны касаются окружности.</p> <p>Центр окружности, вписанной в треугольник, лежит на пересечении биссектрис.</p> |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|



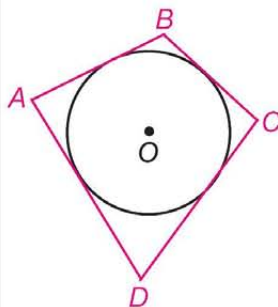
### Четырехугольник, вписанный в окружность



Четырехугольник можно вписать в окружность, если сумма противоположных углов равна  $180^\circ$ .

Если  $ABCD$  – вписанный четырехугольник, то  $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180^\circ$ .  
Обратно: если  $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180^\circ$ , то  $ABCD$  – вписанный четырехугольник.

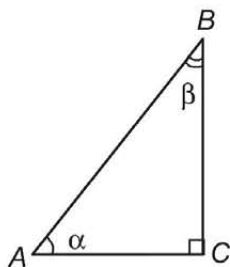
### Четырехугольник, описанный вокруг окружности



Четырехугольник можно описать около окружности, если суммы противоположных сторон равны.

Если  $ABCD$  – описанный четырехугольник, то  $AB + CD = AD + BC$ .  
Обратно: если  $AB + CD = AD + BC$ , то  $ABCD$  – описанный четырехугольник.

## Синус, косинус и тангенс острого угла прямоугольного треугольника



$$\sin \alpha = \frac{\text{противолежающий катет}}{\text{гипотенуза}} = \frac{BC}{AB}$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{прилежащий катет}}{\text{гипотенуза}} = \frac{AC}{AB}$$

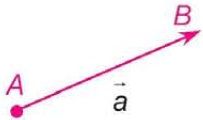
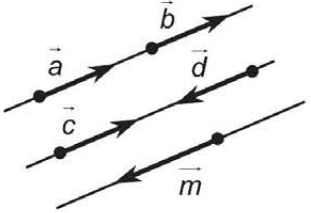
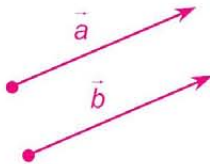
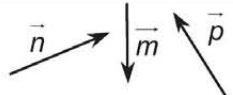
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\text{противолежающий катет}}{\text{прилежащий катет}} = \frac{BC}{AC}$$

$$\sin \beta = \frac{AC}{AB}; \quad \cos \beta = \frac{BC}{AB}; \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{AC}{BC}$$

| $\alpha$                   | $30^\circ$           | $45^\circ$           | $60^\circ$           |
|----------------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| $\sin \alpha$              | $\frac{1}{2}$        | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| $\cos \alpha$              | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$        |
| $\operatorname{tg} \alpha$ | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 1                    | $\sqrt{3}$           |

$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$  – основное тригонометрическое тождество.

## Векторы

|                                                                                                                                                                               |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                                                                                              | <p><b>Вектор</b> – направленный отрезок.<br/>         Обозначение <math>\overrightarrow{AB}</math> или <math>\vec{a}</math>.<br/> <math>A</math> – начало вектора, <math>B</math> – конец.</p>                                                                                                                                                    |
|                                                                                              | <p><b>Нулевой вектор</b> – вектор, начало и конец которого совпадают.<br/>         Обозначение <math>\overrightarrow{MM}</math> или <math>\vec{0}</math>.</p>                                                                                                                                                                                     |
| <p><b>Длиной вектора</b> (абсолютной величиной вектора) называется длина отрезка.<br/>         Обозначение <math> \overrightarrow{AB} </math> или <math> \vec{a} </math>.</p> |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
|                                                                                              | <p><b>Коллинеарные векторы</b> – ненулевые векторы, которые лежат на одной прямой или на параллельных прямых.<br/>         Если коллинеарные векторы направлены в одну сторону относительно прямой, проходящей через их начало, то векторы называются <b>сонаправленными</b>, если в разные стороны – то <b>противоположно направленными</b>.</p> |
|                                                                                              | <p><math>\vec{a} \uparrow \vec{b}</math>; <math>\vec{a} \uparrow \vec{c}</math> – сонаправленные,<br/> <math>\vec{c} \downarrow \vec{d}</math>; <math>\vec{b} \uparrow \vec{d}</math> – противоположно направленные.</p>                                                                                                                          |
|                                                                                             | <p><b>Неколлинеарные векторы</b></p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |



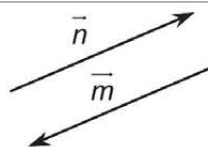
Векторы называются **равными**, если они сонаправлены и их длины равны.

Так как  $\vec{a} \uparrow \vec{b}$ ;  $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ , то  $\vec{a} = \vec{b}$

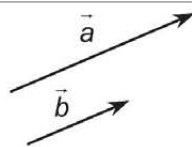
Чтобы утверждать, что векторы равны, необходимо, чтобы выполнялись оба условия:

1) векторы сонаправлены;

2) длины их равны.



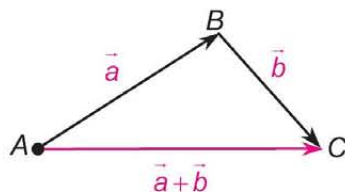
1)  $\vec{n} \nmid \vec{m}$ ; 2)  $|\vec{n}| \neq |\vec{m}|$ , то  $\vec{n} \neq \vec{m}$ .



1)  $\vec{a} \uparrow \vec{b}$ ; 2)  $|\vec{a}| \neq |\vec{b}|$ , то  $\vec{a} \neq \vec{b}$

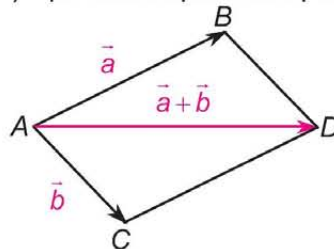
### Сложение и вычитание векторов

1) Правило треугольника



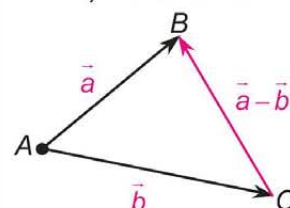
$$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$$

2) Правило параллелограмма



$$\vec{AB} + \vec{AC} = \vec{AD}$$

3) Вычитание



$$\vec{AB} - \vec{AC} = \vec{CB}$$

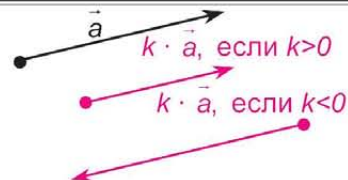
### Умножение вектора на число

Произведение ненулевого вектора  $\vec{a}$  на число  $k$

называется такой **вектор**  $\vec{b}$ , длина которого равна  $|k| \cdot |\vec{a}|$ ;

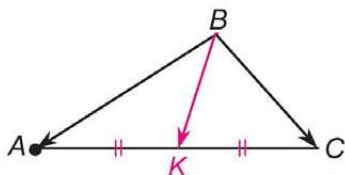
если  $k > 0$ , то  $\vec{a} \uparrow \vec{b}$ ;

если  $k < 0$ , то  $\vec{a} \nmid \vec{b}$ .

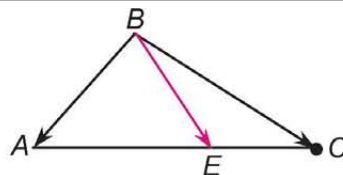


## Законы сложения и умножения векторов

- 1)  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$  – переместительный закон
- 2)  $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$  – сочетательный закон
- 3)  $(kl)\vec{a} = k \cdot (l\vec{a}) = l \cdot (k\vec{a})$  – сочетательный закон
- 4)  $(k + l)\vec{a} = k \cdot \vec{a} + l \cdot \vec{a}$  – I распределительный закон
- 5)  $k \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$  – II распределительный закон



Если  $K$  – середина  $AC$ , то  $\vec{BK} = \frac{1}{2}(\vec{BA} + \vec{BC})$

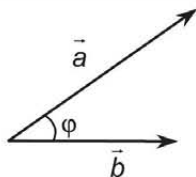


Если  $Ab : bC = m : n$ , то  $\vec{BE} = \frac{n}{m+n}\vec{BA} + \frac{m}{m+n}\vec{BC}$

## Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением двух векторов называется произведение их длин на косинус угла между ними.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi$$



Если  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ , то  $\varphi = 90^\circ$ , то есть  $\vec{a} \perp \vec{b}$ .

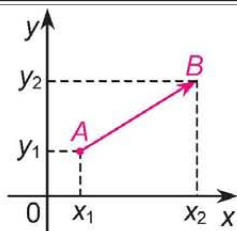
Если  $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$ , то  $\varphi$  – острый.

Если  $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$ , то  $\varphi$  – тупой.

Свойства скалярного произведения для любых  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  и любого числа  $k$ .

- 1)  $\vec{a}^2 \geq 0$
- 2)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$  – переместительный
- 3)  $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$  – распределительный
- 4)  $(k \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b} = k \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b})$  – сочетательный

### Метод координат



$\overrightarrow{AB} \{x_2 - x_1; y_2 - y_1\}$  – координаты вектора

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Если  $\vec{a} \{x_1; y_1\}$  и  $\vec{b} \{x_2; y_2\}$ , то

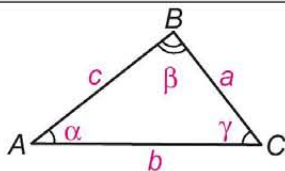
- 1)  $\vec{a} + \vec{b} \{x_1 + x_2; y_1 + y_2\}$
- 2)  $\vec{a} - \vec{b} \{x_1 - x_2; y_1 - y_2\}$
- 3)  $k\vec{a} \{kx_1; ky_1\}$
- 4)  $\vec{a} \cdot \vec{b} (x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2)$

$$5) \cos \varphi = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}},$$

$\varphi$  – угол между векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ .

Пример:  $\vec{a} \{-1; 2\}$ ;  $\vec{b} \{0; -3\}$ .

- 1)  $\vec{a} + \vec{b} \{-1 + 0; 2 - 3\} = \{-1; -1\}$
- 2)  $\vec{a} - \vec{b} \{-1 - 0; 2 - (-3)\} = \{-1; 5\}$
- 3)  $5\vec{a} \{5 \cdot (-1); 5 \cdot 2\} = \{-5; 10\}$
- 4)  $\vec{a} \cdot \vec{b} \{-1 \cdot 0 + 2 \cdot (-3)\} = 0 - 6 = -6$ .
- 5)  $\cos \varphi = \frac{-1 \cdot 0 + 2 \cdot (-3)}{\sqrt{1 + 4} \cdot \sqrt{0 + 9}} = \frac{-6}{3\sqrt{5}} = -\frac{2}{\sqrt{5}} < 0$ ,  
значит  $\varphi > 90^\circ$ .



• **Площадь треугольника**  $S = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$ .

Площадь треугольника равна половине произведения двух сторон на синус угла между ними.

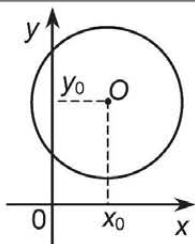
• **Теорема синусов:** стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов.

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R, \quad R - \text{радиус описанной окружности}$$

• **Теорема косинусов:** квадрат стороны равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$$

### Уравнение окружности



$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

$(x_0, y_0)$  – координаты центра окружности,  $R$  – радиус.

Если центр окружности лежит в начале системы координат, то уравнение имеет вид:  $x^2 + y^2 = R^2$ .

### Уравнение прямой

$ax + by + c = 0$ , где  $a, b, c$  – числа.

$y = 0$  – уравнение оси абсцисс.

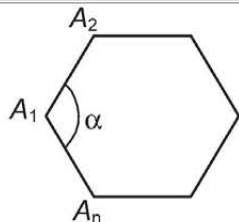
$x = 0$  – уравнение оси ординат.

$y = d$  – уравнение прямой, параллельной оси абсцисс.

$x = d$  – уравнение прямой, параллельной оси ординат.

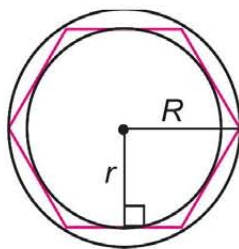
## Правильные многоугольники

Правильным многоугольником называется выпуклый многоугольник, у которого все стороны и все углы равны.



$$\sum_{i=1}^n \alpha_i = 180^\circ \cdot (n - 2) \text{ — сумма всех углов } n\text{-угольника.}$$

$$\alpha = \frac{180^\circ \cdot (n - 2)}{n} \text{ — величина угла правильного } n\text{-угольника.}$$



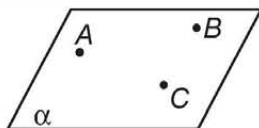
$S = \frac{1}{2} P \cdot r$  — площадь правильного  $n$ -угольника равна половине произведения периметра  $n$ -угольника на радиус окружности, вписанной в  $n$ -угольник.

$a_n = 2R \cdot \sin \frac{180^\circ}{n}$  — сторона правильного многоугольника через радиус окружности, описанной около правильного многоугольника.

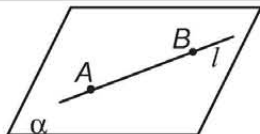
$$r = R \cos \frac{180^\circ}{n}$$

| Правильный $n$ -угольник | $R$                         | $r$                         | $P$          | $S$                             |
|--------------------------|-----------------------------|-----------------------------|--------------|---------------------------------|
| Треугольник $a_3$        | $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$   | $r = \frac{a_3\sqrt{3}}{6}$ | $P_3 = 3a_3$ | $S_3 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$   |
| Квадрат $a_4$            | $R = \frac{a_4\sqrt{2}}{2}$ | $r = \frac{a_4}{2}$         | $P_4 = 4a_4$ | $S_4 = a^2$                     |
| Шестиугольник $a_6$      | $R = a_6$                   | $r = \frac{a_6\sqrt{3}}{2}$ | $P_6 = 6a_6$ | $S_6 = \frac{a^2 3\sqrt{3}}{2}$ |

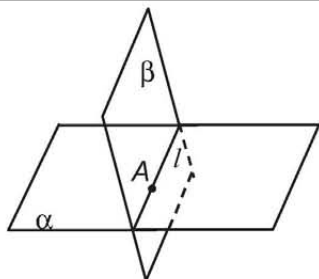
## Аксиомы стереометрии



1. Через любые три точки, не лежащие на одной прямой, проходит плоскость, и притом только одна.  
 Если  $A, B, C \notin l$ , то  $\exists \alpha$ , что  $A, B, C \in \alpha$ , причем  $\alpha$  – единственная.

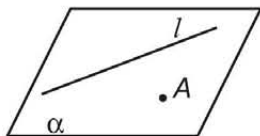


2. Если две точки прямой лежат в плоскости, то все точки этой прямой лежат в данной плоскости.  
 Если  $A, B \in l$ ;  $A, B \in \alpha$ , то  $l \subset \alpha$ .

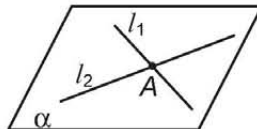


3. Если две различные плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой, проходящей через эту точку.  
 Если  $A \in \alpha$ ,  $A \in \beta$ , то  $\alpha \cap \beta = l$ , где  $A \in l$ .

## Существование плоскости



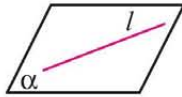
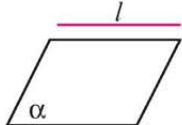
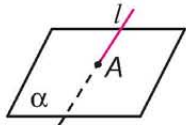
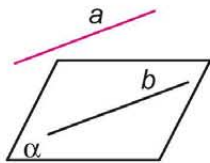
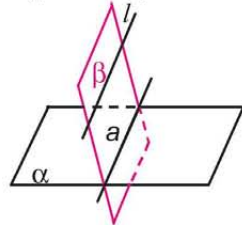
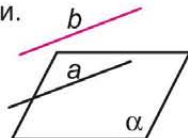
1. Через прямую и не лежащую на ней точку можно провести плоскость, и притом только одну.



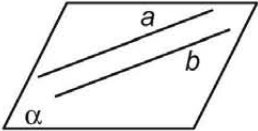
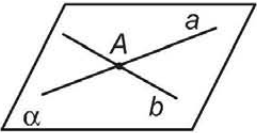
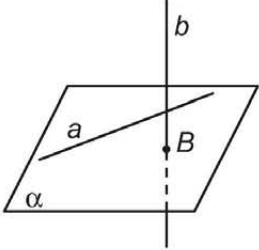
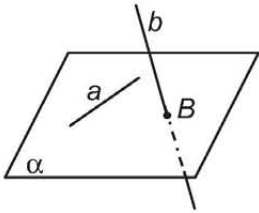
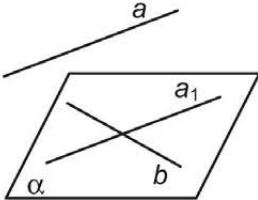
2. Через две пересекающиеся прямые можно провести плоскость, и притом только одну.



### Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве

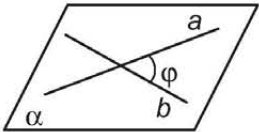
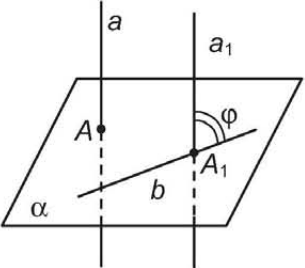
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |                                                                                                                          |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |                                         |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
| <p>1. Прямая лежит в плоскости.<br/><math>l \subset \alpha</math></p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | <p>2. Прямая и плоскость не имеют общих точек, то есть прямая параллельна плоскости. <math>l \parallel \alpha</math></p> | <p>3. Прямая и плоскость имеют одну общую точку, то есть прямая пересекает плоскость.<br/><math>l \cap \alpha = A</math></p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |
| <p><b>Признак параллельности прямой и плоскости</b></p> <p>Если прямая, не лежащая в данной плоскости, параллельна какой-нибудь прямой, лежащей в этой плоскости, то она параллельна данной плоскости.</p> <p>Если <math>a \not\subset \alpha</math>, <math>b \subset \alpha</math>, <math>a \parallel b</math>, то <math>a \parallel \alpha</math>.</p>  |                                                                                                                          | <p><b>Свойства</b></p> <p>1. Если плоскость проходит через данную прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает эту плоскость, то линия пересечения плоскостей параллельна данной прямой.</p> <p>Если <math>l \parallel \alpha</math>, <math>l \subset \beta</math>, <math>\beta \cap \alpha = a</math>, то <math>l \parallel a</math>.</p>  <p>2. Если одна из параллельных прямых лежит на данной плоскости, то другая прямая либо также параллельна данной плоскости, либо лежит в этой плоскости.</p> <p>Если <math>a \parallel b</math>, <math>a \parallel \alpha</math>, то <math>b \parallel \alpha</math>, или <math>b \subset \alpha</math>.</p>  |

## Взаимное расположение прямых в пространстве

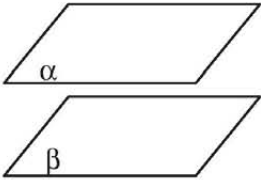
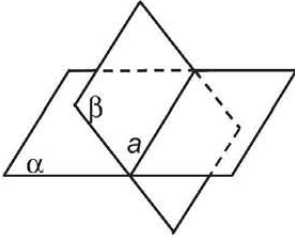
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |                                                                                                                                      |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |                                                                                                                                                                                                                                                                                           |                                                   |
| <p>Две прямые лежат в одной плоскости и не имеют общих точек, то есть <math>a</math> и <math>b</math> параллельные прямые. <math>a \parallel b</math></p>                                                                                                                                                                                                                                                         | <p>Две прямые лежат в одной плоскости и имеют одну общую точку, то есть <math>a</math> и <math>b</math> пересекающиеся прямые. <math>a \cap b</math></p>                                                                                                                                                                                                                   | <p>Две прямые не лежат в одной плоскости, то есть <math>a</math> и <math>b</math> скрещивающиеся прямые. <math>a \times b</math></p> |
| <p><b>Признак скрещивающихся прямых</b></p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | <p><b>Теорема о скрещивающихся прямых</b></p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |                                                                                                                                      |
| <p>Если одна из двух прямых лежит в некоторой плоскости, а другая прямая пересекает эту плоскость в точке, не лежащей на первой прямой, то эти прямые скрещивающиеся.<br/>Если <math>a \subset \alpha</math>, <math>b \cap \alpha = B</math>, <math>B \notin a</math>, то <math>a</math>, <math>b</math> – скрещивающиеся.</p>  | <p>Через каждую из двух скрещивающихся прямых проходит плоскость, параллельная другой прямой, и притом только одна.<br/>Если <math>a \times b</math>, то <math>\exists \alpha: b \subset \alpha</math> и <math>\alpha \parallel a</math> причем <math>\alpha</math> – единственная.</p>  |                                                                                                                                      |



## Угол между прямыми

|                                                                                   |                                                                                                                                                                                                                                                |
|-----------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|  | <p>Если <math>a</math> и <math>b</math> лежат в одной плоскости и пересекаются, то образуется 4 неразвернутых угла. Угол <math>0^\circ &lt; \varphi \leq 90^\circ</math> называется углом между прямыми <math>a</math> и <math>b</math>.</p>   |
|  | <p>Если <math>a</math> и <math>b</math> скрещивающиеся прямые, то через произвольную точку <math>A_1 \in b</math> проведем прямую <math>a_1</math> параллельную <math>a</math>, тогда <math>\angle(a, b) = \angle(a_1, b) = \varphi</math></p> |

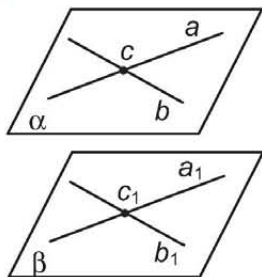
## Параллельность плоскостей

|                                                                                                                                                        |                                                                                                                                                     |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                                                                       |                                                                   |
| <p>Две плоскости не имеют общих точек, то есть плоскости <math>\alpha</math> и <math>\beta</math> параллельны. <math>\alpha \parallel \beta</math></p> | <p>Две плоскости имеют общие точки, то есть плоскости <math>\alpha</math> и <math>\beta</math> пересекаются. <math>\alpha \cap \beta = a</math></p> |

### Признак параллельности плоскостей

Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.

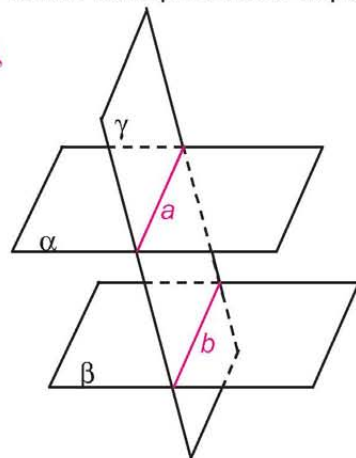
Если  $a, b \subset \alpha$ ,  $a \cap b = c$ ,  
 $a_1, b_1 \subset \beta$ ,  $a_1 \cap b_1 = c_1$ ,  
 $a \parallel a_1$ ,  $b \parallel b_1$ , то  $\alpha \parallel \beta$



### Свойства параллельных плоскостей

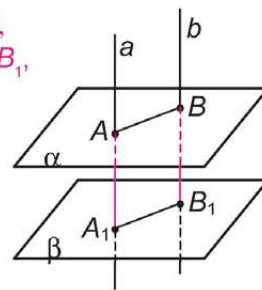
1. Если две параллельные плоскости пересечены третьей, то линии их пересечения параллельны.

Если  $\alpha \parallel \beta$ ,  $\gamma \cap \alpha = a$ ,  
 $\gamma \cap \beta = b$ , то  $a \parallel b$ .

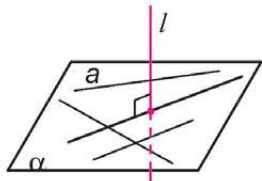


2. Отрезки параллельных прямых, заключенные между параллельными плоскостями, равны.

Если  $a \parallel b$ ,  $\alpha \parallel \beta$ ,  $a \cap \alpha = A$ ,  
 $b \cap \alpha = B$ ,  $a \cap \beta = A_1$ ,  $b \cap \beta = B_1$ ,  
 то  $AA_1 = BB_1$ .



## Перпендикулярность прямой и плоскости

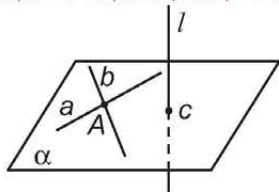


Прямая называется **перпендикулярной** к плоскости, если она перпендикулярна любой прямой, лежащей в этой плоскости.

### Признак перпендикулярности прямой и плоскости

Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна этой плоскости.

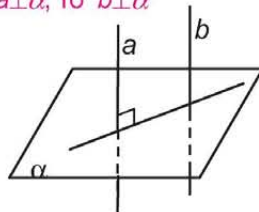
Если  $a, b \subset \alpha$ ,  $a \cap b = A$ ,  $l \perp a$ ,  $l \perp b$ , то  $l \perp \alpha$



### Связь между параллельностью прямых и перпендикулярностью к плоскости

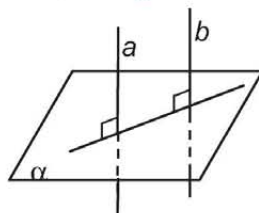
1. Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна плоскости, то и другая прямая перпендикулярна этой плоскости.

Если  $a \parallel b$ ,  $a \perp \alpha$ , то  $b \perp \alpha$

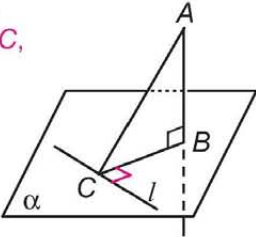
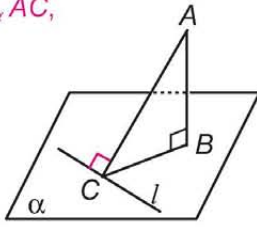


2. Если две прямые перпендикулярны к плоскости, то они параллельны.

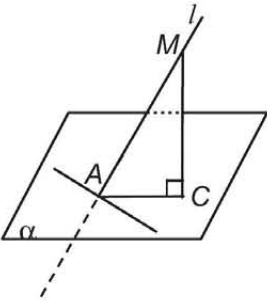
Если  $a \perp \alpha$ ,  $b \perp \alpha$ , то  $a \parallel b$ .



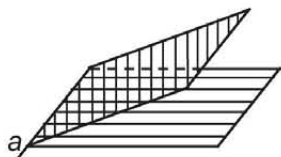
## Теорема о трех перпендикулярах

| Прямая                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | Обратная                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>Прямая, проведенная в плоскости через основание наклонной перпендикулярно ее проекции на эту плоскость, перпендикулярна и самой плоскости.</p> <p>Если <math>AB \perp \alpha</math>, <math>BC = \text{пр}_\alpha AC</math>, <math>l \perp BC</math>, то <math>l \perp AC</math>.</p>  | <p>Прямая, проведенная в плоскости через основание наклонной перпендикулярно к ней, перпендикулярна и к ее проекции.</p> <p>Если <math>AB \perp \alpha</math>, <math>BC = \text{пр}_\alpha AC</math>, <math>l \perp AC</math>, то <math>l \perp BC</math>.</p>  |

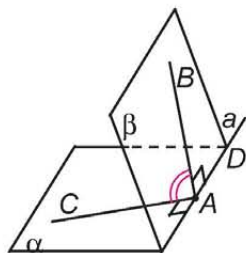
## Угол между прямой и плоскостью

|                                                                                                                                                                                                                                           |                                                                                                                                                        |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                                                                                                                                                          | <p>Углом между прямой и плоскостью, пересекающей эту прямую и не перпендикулярной к ней, называется угол между прямой и ее проекцией на плоскость.</p> |
| <p>Если <math>l</math> – прямая, <math>\alpha</math> – плоскость, <math>MC \perp \alpha</math>, <math>AC = \text{пр}_\alpha l</math>, то <math>\angle MAC</math> – угол между прямой <math>l</math> и плоскостью <math>\alpha</math>.</p> |                                                                                                                                                        |

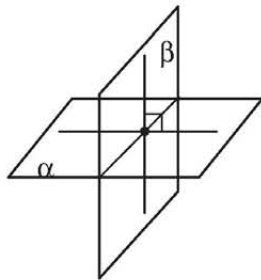
## Двугранный угол



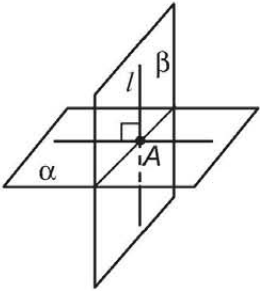
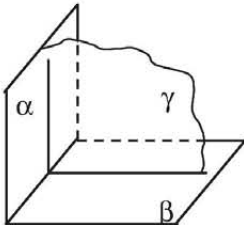
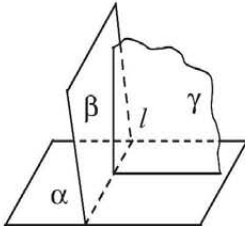
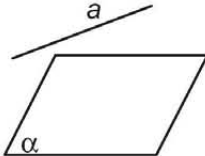
Двугранным углом называется фигура, образованная прямой и двумя полуплоскостями с общей границей  $a$ , не принадлежащими одной плоскости.



Если  $BA \perp a$ ,  $AB \subset \beta$ ,  $CA \perp a$ ,  $AC \subset \alpha$ , то  $\angle BAC$  – линейный угол двугранного угла  $BADC$ .

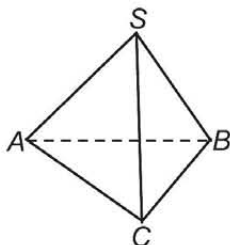


Две пересекающиеся плоскости называются перпендикулярными, если угол между ними прямой.

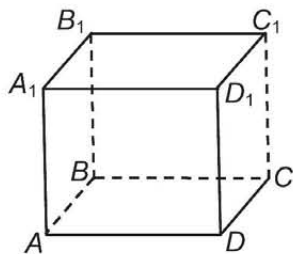
| Признак перпендикулярности плоскостей                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | Следствия                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>Если одна из двух плоскостей проходит через прямую, перпендикулярную к другой плоскости, то такие плоскости перпендикулярны.</p> <p>Если <math>l \subset \beta</math>,<br/> <math>l \perp \alpha</math>,<br/> <math>l \cap \alpha = A</math><br/> <math>\downarrow</math><br/> то <math>\alpha \perp \beta</math></p>  | <p>Прямая, перпендикулярная к прямой, по которой пересекаются две данные плоскости, перпендикулярна к каждой из этих плоскостей.</p> <p>Если <math>\alpha \cap \beta = a</math><br/> <math>\frac{\gamma \perp a}{\downarrow}</math><br/> то <math>\gamma \perp \alpha</math> и <math>\gamma \perp \beta</math></p>                                                                           |
| <p>Прямая пересечения двух плоскостей, перпендикулярных к третьей плоскости, также перпендикулярна этой плоскости.</p> <p>Если <math>\alpha \perp \gamma</math>,<br/> <math>\beta \perp \gamma</math>,<br/> то <math>l \perp \gamma</math></p>                                                                           | <p>Через любую прямую a, не перпендикулярную к плоскости <math>\alpha</math>, можно провести плоскость <math>\beta</math>, перпендикулярную <math>\alpha</math>, и притом только одну.</p> <p>Если <math>a \not\perp \alpha</math>, <math>a \not\subset \alpha</math>,<br/> то <math>\exists \beta: a \subset \beta, \beta \perp \alpha</math><br/> и <math>\beta</math> – единственная</p>  |

## Многогранники

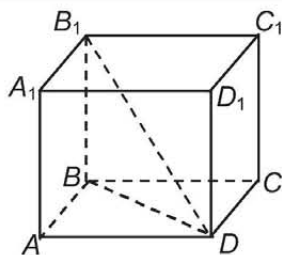
Поверхность, составленную из многоугольников и ограничивающую некоторое геометрическое тело, называют **многогранником**.



**Тетраэдр** – многогранник, составленный из 4 треугольников. Правильный тетраэдр – все грани правильные треугольники.



Многогранник, составленный из двух равных параллелограммов, лежащих в параллельных плоскостях, и четырех параллелограммов, называется **параллелепипедом**. Обозначение:  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$



Параллелепипед называется **прямоугольным**, если его боковые ребра перпендикулярны к основанию, а основания – прямоугольники.

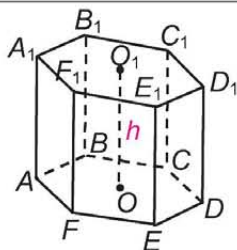


## Свойства параллелепипеда

1. Противоположные грани параллельны и равны.
2. Диагонали пересекаются в одной точке и делятся этой точкой пополам.
3. Квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трех его измерений.

$$B_1D^2 = AB^2 + BC^2 + BB_1^2$$

## Призма



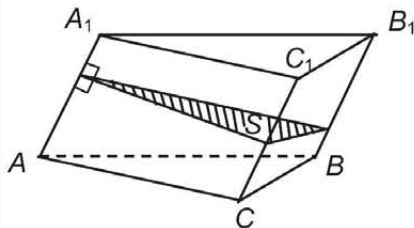
Многогранник, составленный из двух равных многоугольников, расположенных в параллельных плоскостях, и  $n$  параллелограммов, называется **призмой**.

Равные многоугольники – основания призмы.  
 $n$  параллелограммы – боковые грани призмы.  
 стороны параллелограммов — ребра призмы.

Если боковые ребра призмы перпендикулярны к основаниям, то призма называется **прямой**.

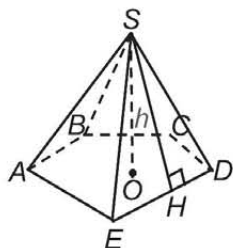
Прямая призма называется **правильной**, если ее основания – правильные многоугольники.

$$S_{\text{бок. пов.}} = m_{\text{осн.}} \cdot h; S_{\text{полн. пов.}} = S_{\text{бок. пов.}} + 2S_{\text{осн.}}; V = S_{\text{осн.}} \cdot h.$$



Объем наклонной призмы равен произведению площади перпендикулярного сечения на боковое ребро.

$$V = S_{\text{сеч.}} \cdot AA_1$$



Многогранник, составленный из  $n$ -угольника и  $n$  треугольников, называется **пирамидой**.

$SO \perp (ABCE)$  – высота пирамиды;  $n$ -угольник – основание; треугольники – боковые грани.

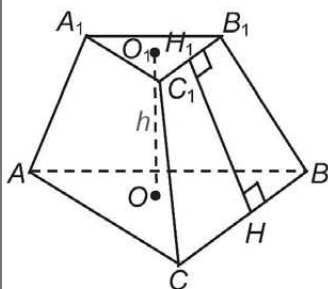
Пирамида называется правильной, если ее основание – правильный многоугольник, а основание высоты пирамиды – центр вписанной (или описанной) в многоугольник окружности.

$S_{\text{бок}} = \frac{1}{2} P_{\text{осн}} \cdot SH$ , где  $SH$  – апофема, высота боковой грани правильной пирамиды.

$S_{\text{осн}} = \frac{1}{2} P_{\text{осн}} \cdot r$ , где  $r$  – радиус вписанной окружности.

$$S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + S_{\text{осн}}.$$

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot K$$



Усеченная пирамида – часть пирамиды, заключенная между основанием и секущей плоскостью, параллельной основанию.

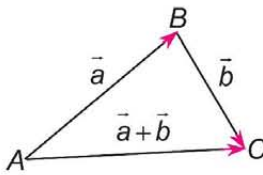
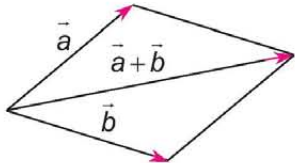
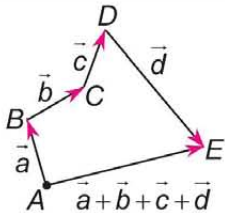
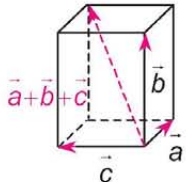
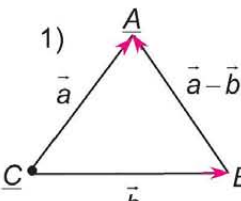
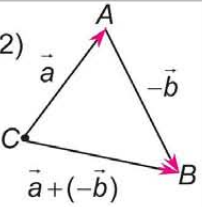
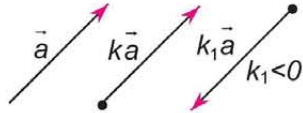
$S_{\text{бок}} = \frac{P_1 + P_2}{2} \cdot HH_1$ , где  $m_1$  и  $m_2$  – периметры оснований;

$HH_1$  – высота боковой грани правильной усеченной пирамиды;

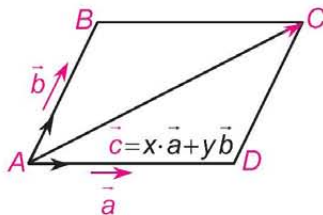
$V = \frac{1}{3} K \cdot (S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 \cdot S_2})$ , где  $S_1$  и  $S_2$  – площади оснований;

$h = OO_1$  – высота усеченной пирамиды.

## Сложение векторов

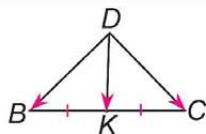
| Правило треугольника                                                                                                                                | Правило параллелограмма                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | Правило многоугольника                                                                                                                                                                                                                                                        |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|  $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ |  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ <p>(переместительный закон)</p> $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ <p>(сочетательный закон)</p>                                                                                                                                                                                                                                      |  $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE}$                                                                             |
| Сложение векторов<br>Правило параллелепипеда                                                                                                        | Вычитание векторов                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | Умножение векторов<br>на число                                                                                                                                                                                                                                                |
|                                                                    | <div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="text-align: center;"> <p>1)</p>  <math display="block">\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB}</math> </div> <div style="text-align: center;"> <p>2)</p>  <math display="block">\vec{a} + (-\vec{b})</math> </div> </div> |  <p><math>k_1 &lt; 0</math></p> <p><b>Свойства:</b> 1. <math>(kl)\vec{a} = k(l\vec{a})</math><br/>(сочетательный закон)<br/>2. <math>k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}</math></p> |

**Компланарные векторы** – векторы, имеющие равные им векторы, лежащие в одной плоскости.

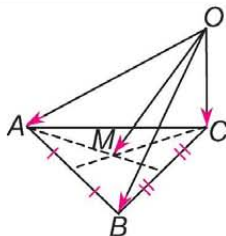


Если вектор  $\vec{c}$  можно разложить по векторам  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  в виде  $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$ , где  $x, y$  – числа, то векторы  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$  – компланарны.

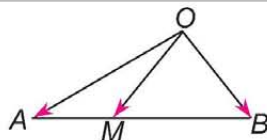
### Свойства векторов



$\overrightarrow{DK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC})$ , где  $K$  – середина отрезка  $BC$ ,  
 $a$  – произвольная точка пространства.



$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$ , где  $M$  – точка пересечения медиан  $\triangle ABC$ ,  
 $O$  – произвольная точка пространства.

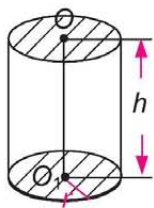


$O$  – произвольная точка пространства, если  $\overrightarrow{AM} = \lambda \cdot \overrightarrow{MB}$ ,  
где  $\lambda \neq -1$ , то  $\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} + \lambda \overrightarrow{OB}}{1 + \lambda}$

## Метод координат в пространстве

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>Координаты вектора</p> $\vec{a} \{x_1; y_1; z_1\}, \vec{b} \{x_2; y_2; z_2\}$ $\vec{a} + \vec{b} = \{x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2\}$ $\vec{a} - \vec{b} = \{x_1 - x_2; y_1 - y_2; z_1 - z_2\}$ $\alpha \vec{a} \{ \alpha x_1; \alpha y_1; \alpha z_1 \}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | <p>Координаты середины отрезка</p> $A(x_1; y_1; z_1), B(x_2; y_2; z_2)$ <p>C – середина AB</p> $C \left( \frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2} \right)$ $\overline{AB} \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
| <p>Если <math>\vec{a}</math> и <math>\vec{b}</math> – коллинарные векторы, то <math>\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2} = k</math> соответствующие координаты пропорциональны. Если <math>\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}</math> – компланарны, то любой вектор можно выразить через два других.</p> $\vec{a} = \alpha \cdot \vec{b} + \beta \cdot \vec{c} \begin{cases} x_1 = \alpha x_2 + \beta x_3 & \vec{a} \{x_1; y_1; z_1\} \\ y_1 = \alpha y_2 + \beta y_3 & \vec{b} \{x_2; y_2; z_2\} \\ z_1 = \alpha z_2 + \beta z_3 & \vec{c} \{x_3; y_3; z_3\} \end{cases}, \text{ где } \vec{b} \{x_2; y_2; z_2\}$ |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
| <p style="text-align: center;"><b>Длина вектора</b></p> $ \overline{AB}  = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}, \text{ где } A(x_1; y_1; z_1); B(x_2; y_2; z_2)$ <p style="text-align: center;">или <math> \vec{a}  = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \text{ где } \vec{a} \{x; y; z\}.</math></p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
| <p><b>Скалярное произведение векторов</b></p> $\vec{a} \cdot \vec{b} =  \vec{a}  \cdot  \vec{b}  \cos(\widehat{a, b})$ $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$ $\cos \alpha = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | <p><b>Свойства скалярного произведения</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li><math>\vec{a}^2 \geq 0</math>, причем <math>\vec{a}^2 &gt; 0</math> при <math>\vec{a} \neq 0</math></li> <li><math>\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}</math> (переместительный закон)</li> <li><math>(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}</math> (распределительный закон)</li> <li><math>(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b})</math> (сочетательный закон)</li> </ol> |

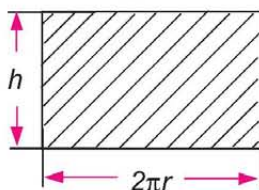
## Цилиндр



$$S_{\text{бп}} = 2\pi rh$$

$$S_{\text{пп}} = 2\pi(r+h)$$

$$V = S_{\text{осн}} \cdot h = \pi r^2 h$$

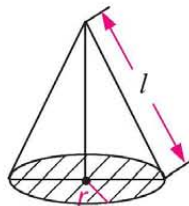


Тело, ограниченное цилиндрической поверхностью и двумя кругами, называется **цилиндром**.

Цилиндр может быть получен вращением прямоугольника вокруг одной из его сторон.

Развертка – прямоугольник.

## Конус

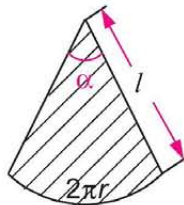


$$S_{\text{бп}} = \pi rl$$

$$S_{\text{пп}} = \pi(l+r)$$

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 K$$

$$S_{\text{бок}} = \frac{\pi l^2}{360^\circ} \cdot \alpha$$

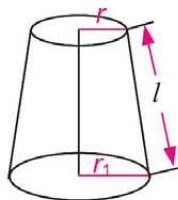


Тело, ограниченное конической поверхностью и кругом, с границей, называется **конусом**.

Конус может быть получен вращением прямоугольного треугольника вокруг одного из его катетов.

Развертка – круговой сектор.

## Усеченный конус



Усеченный конус – часть конуса, заключенная между основанием и секущей плоскостью, параллельной основанию.

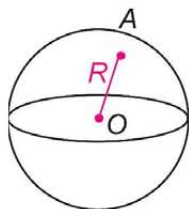
Усеченный конус может быть получен вращением прямоугольной трапеции вокруг ее боковой стороны, перпендикулярной основаниям.

$$S_{\text{бп}} = \pi(r + r_1)l$$

$$V = \frac{1}{3}K(S + S_1 + \sqrt{S \cdot S_1}); S \text{ и } S_1 - \text{площади оснований.}$$

$$\text{или } V = \frac{1}{3}\pi K(r^2 + r_1^2 + r \cdot r_1)$$

## Сфера



Сферой называется поверхность, состоящая из всех точек пространства, расположенных на данном расстоянии от данной точки. Сфера может быть получена вращением полуокружности вокруг ее диаметра.

$S = 4\pi R^2$  – площадь поверхности сферы.

## Уравнение сферы

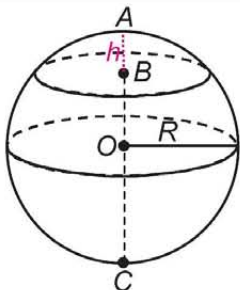
$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$ , где  $(x_0; y_0; z_0)$  – координаты центра сферы,  
 $(x; y; z)$  – координаты точки сферы,  $R$  – радиус сферы.

Если центр сферы совпадает с началом системы отсчета, то уравнение имеет вид

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$



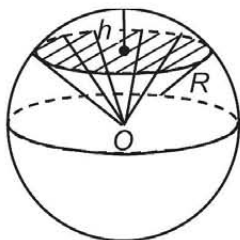
**Шар** – тело, ограниченное сферой.  $V_{\text{шара}} = \frac{4}{3} \pi R^3$ .



**Шаровой сегмент** – часть шара, отсекаемая от него плоскостью.  $AB$  и  $BC$  – высоты получившихся сегментов.

$$V_c = \pi h^2 \cdot \left( R - \frac{1}{3} h \right), \text{ где } R - \text{ радиус шара, } h - \text{ высота сегмента.}$$

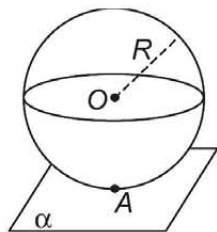
**Шаровой слой** – часть шара, заключенная между двумя параллельными секущими плоскостями.



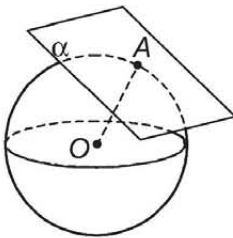
**Шаровой сектор** – тело, полученное вращением кругового сектора с углом, меньшим  $90^\circ$ , вокруг прямой, содержащей один из ограничивающих круговой сектор радиусов.

$$V = \frac{2}{3} \pi R^2 K.$$

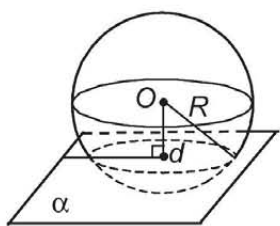
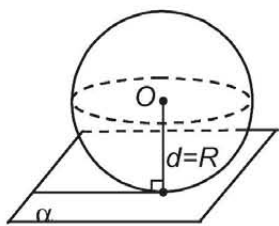
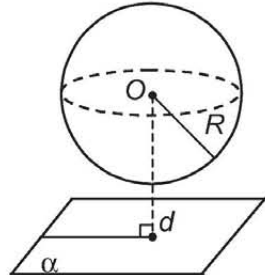
### Касательная к сфере



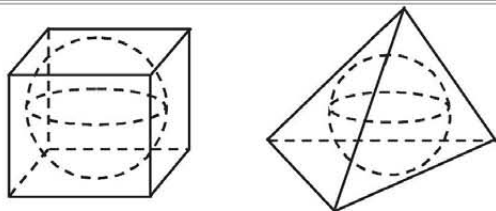
Плоскость, имеющая со сферой одну общую точку, называется **касательной** к сфере, а их общая точка – **точкой касания** плоскости и сферы.

| Свойство касательной к сфере                                                                                                                                                                                                                                                                                   | Признак касательной к сфере                                                                                                                                                                                                                                                                |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>Радиус сферы, проведенный в точку касания сферы и плоскости, перпендикулярен к касательной плоскости.</p> <p>Если <math>\alpha</math> – касательная, <math>A</math> – точка касания, то <math>OA \perp \alpha</math>.</p>  | <p>Если радиус сферы перпендикулярен к плоскости, проходящей через его конец, лежащий на сфере, то эта плоскость является касательной к сфере.</p> <p>Если <math>A \in \alpha</math>, <math>OA = R</math>, <math>OA \perp \alpha</math>, то <math>\alpha</math> – касательная к сфере.</p> |

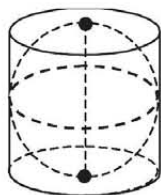
### Взаимное расположение сферы и плоскости в пространстве

| $d$ – расстояние от центра до плоскости; $R$ – радиус сферы                                                                                                                                |                                                                                                                                                                                      |                                                                                                                                                                                                  |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|  <p><math>d &lt; R</math>, сфера и плоскость имеют много общих точек, т.е. пересекаются по окружности</p> |  <p><math>d = R</math>, сфера и плоскость имеют одну общую точку, т.е. плоскость касается сферы</p> |  <p><math>d &gt; R</math>, сфера и плоскость не имеют общих точек, т.е. плоскость и сфера не пересекаются</p> |

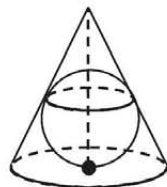
**Сфера, вписанная в многогранник, цилиндр и конус**



Сфера вписана в многогранник, если она касается всех его граней.

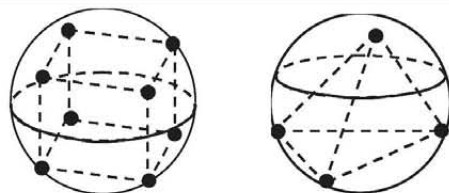


Сфера вписана в цилиндр, если она касается оснований и боковой поверхности.

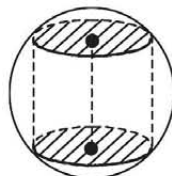


Сфера вписана в конус, если она касается конической поверхности и основания.

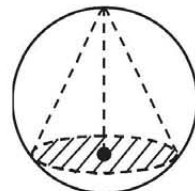
**Сфера, описанная вокруг многогранника, цилиндра, конуса**



Сфера описана вокруг многогранника, если все вершины его лежат на сфере.



Сфера описана вокруг цилиндра, если его основания являются сечением сферы.



Сфера описана вокруг конуса, если вершина лежит на сфере, а основание конуса является сечением сферы.