**Функциональные уравнения**

# **Глава I. Функциональные уравнения: классификация и методы решения.**

## **§1. Основные понятия и классификация функциональных уравнений**

 **Функциональное уравнение** – это уравнение, которое содержит одну или несколько неизвестных функций (с заданными областями определения и значений). Решить функциональное уравнение – значит найти все функции, которые тождественно ему удовлетворяют.

Примеры функциональных уравнений:

1)$2f\left(x\right)=0$

2)$f\left(x+3\right)-f\left(2-x\right)=3x+1$

3)$f\left(x+y\right)=f\left(x\right)+f(y)$

Наиболее важны и известны уравнения Коши:

$$f\left(x+y\right)=f\left(x\right)+f\left(y\right) \left(x, y\in R\right)$$

$$f\left(xy\right)=f\left(x\right)+f\left(y\right) \left(x, y\in R\0\right)$$

$$f\left(x+y\right)=f(xy)$$

$$f\left(x+y\right)=f(x)f(y)$$

В современной математике изучаются, в основном, дифференциальные уравнения, т.к. они имеют большое прикладное применение в физике и технике. Однако они практически не встречаются в олимпиадных задачах, потому что их решение зачастую требует специфических знаний из высшей математики, поэтому в нашем пособии мы их рассматривать не будем.

 Несмотря на то, что каждая олимпиадная задача с функциональными уравнениями имеет своеобразный подход к решению, всё же можно выделить некоторые группы уравнений, объединенных общей идеей решения, основанной на каком-то математическом методе (метод подстановок) или анализе свойств функции (чётность/нечётность, монотонность, непрерывность и др.).

 Итак, выделим следующие группы функциональных уравнений по методу их решения:

1. Перебор переменных.
2. Метод подстановок (метод сведения к системе уравнений).
3. Использование функциональных уравнений с известными решениями.
4. Метод Коши.

## **§2. Перебор переменных**

Метод перебора переменных – самый простой среди выделенных мною.

*Суть метода:* подставить несколько каких-то «краеугольных» значений (0, 1, 2, -1 и т.д.) вместо переменных в данное функциональное уравнение, получив таким образом систему уравнений, и решить её.

**Примеры:**

1)Найти все такие функции, которые удовлетворяют системе неравенств

$$f:R⟶R$$

$\left\{\begin{array}{c}f\left(x+y\right)\leq f\left(x\right)+f\left(y\right)\\f(x)\leq x\end{array}\right.$

**Решение.**

Возьмем $x=y=0$. Тогда:

$\left\{\begin{array}{c}f\left(0\right)\leq f\left(0\right)+f\left(0\right)\\f(0)\leq 0\end{array}\right.$⇒$f\left(0\right)=0$

$0=f\left(0\right)=f\left(x+\left(-x\right)\right)\leq f\left(x\right)+f\left(-x\right)\leq x+(-x)=0$⇒$f\left(x\right)=x$

**Ответ:** $f\left(x\right)=x$.

2) Найти все такие функции, которые удовлетворяют равенству

$$f:R⟶R$$

$$f\left(x+y\right)=2^{y}∙f(x)$$

**Решение.**

$$x=0$$

$$f\left(y\right)=2^{y}∙f\left(0\right)=c∙2^{y}$$

$$2^{y}∙f\left(x\right)=2^{y}∙c∙2^{x}$$

**Ответ:** $f\left(x\right)=c∙2^{x}$.

## **§3. Метод подстановок**

Метод подстановок довольно схож с методом перебора переменных.

*Суть метода:* подставить вместо переменных какие-то выражения вида *g(x)* так, чтобы получить решаемую систему уравнений.

Не всегда очевидно, какое именно выражение g(x) нужно подставить вместо x в аргументах функции вида $h(x)$ (в первом примере $h\left(x\right)=\frac{x}{x+1}$, во втором $h\_{1}\left(x\right)=\frac{x}{x+1}$, $h\_{2}\left(x\right)=x+1$). В таких случаях имеет смысл решить уравнение h(g(x))=x (или какому-то другому $q(x)$, все зависит от конкретного примера). В результате получаем решаемую систему уравнений.

**Примеры:**

1) Найти все такие функции, которые удовлетворяют равенству

$$f\left(\frac{x}{x+1}\right)=x^{2}$$

**Решение.**

$\frac{g(x)}{g\left(x\right)+1}=x$⇒ $g\left(x\right)=\frac{x}{1-x}$

Подставляем в уравнение вместо x найденную g(x):

$f\left(x\right)=\frac{x^{2}}{(x-1)^{2}}$($D(f):x\ne 1$)

**Ответ:** $f\left(x\right)=\frac{x^{2}}{(x-1)^{2}}$($D(f):x\ne 1$).

2) Найти все такие функции, которые удовлетворяют равенству

$$f\left(\frac{x}{x+1}\right)+2f\left(x+1\right)=x+1$$

**Решение.**

Если действовать точно так же, как и в первом примере, быстро и красиво не получится. Но тем не менее, если вместо $x$ подставить $x-1$, а уже потом применять метод подстановок, то получим систему уравнений:

$$\left\{\begin{array}{c}f\left(\frac{x-1}{x}\right)+2f\left(x\right)=x\\f\left(x\right)+2f\left(\frac{1}{1-x}\right)=\frac{1}{1-x}\\f\left(\frac{1}{1-x}\right)+2f\left(\frac{x-1}{x}\right)=\frac{x-1}{x}\end{array}\right.$$

Несмотря на внешнюю сложность, по сути система эквивалентна:

$\left\{\begin{array}{c}a+2b=x\\b+2c=y\\c+2a=z\end{array}\right.$, откуда легко находим $b=\frac{4x+y-2z}{9}$, т.е.

 $f\left(x\right)=\frac{4x+\frac{1}{1-x}-\frac{2x-2}{x}}{9} =\frac{4x^{3}-6x^{2}+3x-2}{9x\left(x-1\right)} $

$$D\left(f\right):x\ne 0,1 $$

**Ответ:** $f\left(x\right)=\frac{4x^{3}-6x^{2}+3x-2}{9x\left(x-1\right)},\left(f\right):x\ne 0,1 $.

Метод подстановок бывает довольно громоздким и сложным в вычислениях и преобразованиях, но применяется часто.

## **§4. Использование функциональных уравнений с известными решениями**

*Суть метода:*применить при решении функциональные уравнения, для которых уже известны описываемые решения.

**Примеры:**

1) Найти все такие функции, которые удовлетворяют равенству

$$f\left(x+y\right)=f\left(x\right)+f\left(y\right)+2xy$$

**Решение.**

Возьмем вспомогательную функцию $g\left(x\right)=f\left(x\right)-x^{2}$

Подставим в исходное уравнение $f\left(x\right)=g\left(x\right)+x^{2}$

$$g\left(x+y\right)+\left(x+y\right)^{2}=g\left(x\right)+x^{2}+g\left(y\right)+y^{2}+2xy$$

$$g\left(x+y\right)=g\left(x\right)+g(y)$$

Т.е. функция *g(x)* удовлетворяет уравнению Коши, откуда

$$f\left(x\right)=g\left(x\right)+x^{2}=ax+x^{2}$$

2) Найти все такие функции, которые удовлетворяют равенству

$$f:(0,+\infty )⟶R$$

$$f\left(xy\right)=xf\left(y\right)+yf(x)$$

**Решение.**

Поделим исходное уравнение на $xy$.

$$\frac{f\left(xy\right)}{xy}=\frac{f\left(y\right)}{y}+\frac{f(x)}{x}$$

Введем дополнительную функцию $g\left(x\right)=\frac{f(x)}{x}$

Тогда имеем:

$$g\left(xy\right)=g\left(x\right)+g(y)$$

Т.е. функция $g(x)$ удовлетворяет третьему уравнению Коши, откуда $f\left(x\right)=xlog\_{a}x$

**Ответ:** $f\left(x\right)=xlog\_{a}x$.

## **§5. Метод Коши**

Важно заметить, что метод Коши применяется для *непрерывных* функций.

*Суть метода:* постепенное отыскание решения функционального уравнения (вначале на множестве натуральных чисел, затем, с помощью математической индукции, на множестве целых, рациональных и, в заключение, действительных чисел).

**Пример:**

**Аддитивное уравнение Коши:** $f\left(x+y\right)=f\left(x\right)+f\left(y\right) \left(x, y\in R\right)$

**Решение (в непрерывных функциях).**

Функция $f\left(x\right)=ax$, где $a=f(1)$ – решение этого уравнения, однако просто «заметить» недостаточно, необходимо строгое доказательство.

Докажем, что за знак функции можно выносить рациональные числа, т.е.

$$f\left(rx\right)=rf\left(x\right) r\in Q, x\in R$$

Воспользуемся индукцией. Для натуральных чисел имеем: $f\left(nx\right)=nf\left(x\right) n\in N$. База $n=1$ очевидна. Докажем переход от $n$ к $n+1$. $f\left(nx\right)=nf\left(x\right) $. $f\left(\left(n+1\right)x\right)=f\left(nx+x\right)=f\left(nx\right)+f\left(x\right)=nf\left(x\right)+f\left(x\right)=(n+1)f(x)$. Теперь докажем $f\left(\frac{x}{n}\right)=\frac{1}{n}f(x)$. $f\left(n\frac{x}{n}\right)=nf\left(\frac{x}{n}\right)=f(x)$. Последние два равенства и означают $f\left(\frac{x}{n}\right)=\frac{1}{n}f(x)$. Тогда имеем:

$f\left(\frac{p}{q}x\right)=pf\left(\frac{x}{q}\right)=p\frac{1}{q}f\left(x\right)=\frac{p}{q}f(x)$. Теперь воспользуемся леммой\*: если функции совпадают во всех рациональных точках, то они равны. Тогда имеем:

$$f\left(r\right)=rf\left(1\right)=ar$$

**Лемма.** Если значения двух непрерывных функций $f и$ $g $ совпадают во всех рациональных точках, тогда $f\left(x\right)=g\left(x\right)$ во всех действительных точках.

**Доказательство.**

Пусть $x\_{0}$ – иррациональная точка. Выберем последовательность рациональных точек $(x\_{n})$, сходящуюся к $x\_{0}$ (например, последовательность десятичных приближений $x\_{0}$ по недостатку).

Тогда в силу непрерывности функции $f$ последовательность $\left(f\left(x\_{n}\right)\right)$ будет сходиться к $f\left(x\_{0}\right)$.

Аналогично, последовательность $(g(x\_{n}))$ будет сходиться к $g\left(x\_{0}\right)$.

По условию $f\left(x\_{n}\right)=g\left(x\_{n}\right).$ Переходя в этом равенстве к пределу при $n\rightarrow +\infty $, получим $f\left(x\_{0}\right)=g(x\_{0})$.

Поскольку $x\_{0}$ выбиралась произвольно, лемма доказана.

**Ответ:** $f\left(x\right)=ax, где a=f(1).$

**Замечание.**

Самому решить это уравнение довольно сложно, если не невозможно, так что такой метод нужно просто запомнить.

# **Глава II.Применение функциональных уравнений в решении задач.**

 В пособии применение функциональных уравнений в решении задач будет рассмотрено, в первую очередь, с точки зрения **идеи** создания выделенной в классификации. Иными словами, методы решения таких задач основаны на **свойствах** функций, а не на методах решения функциональных уравнений (однако, если задача по сути представляет собой функциональное уравнение, конечно, применять метод подстановок и т.п. можно и нужно).

**Задача 1.**

Решить уравнение:

$\sqrt{x+4}+x-2=0$(МГУ, ВМК, 1991)

**Решение.**

Конечно, легко решить это уравнение с помощью равносильного перехода или замены переменной. Однако есть и другой, не менее простой, метод решения.

Рассмотрим функцию $f\left(x\right)=\sqrt{x+4}+x-2$ с областью определения $D\left(f\right)=[-4;+\infty )$. $f\left(0\right)=0$, значит 0 – корень уравнения. $f(x)$ – сумма двух непрерывных возрастающих функций $y=\sqrt{x+4}$ и $y=x-2$, следовательно, найденный корень – единственный.

**Ответ:** 0.

**Задача 2.**

Решить неравенство:

$\sqrt{2-x}<x+4$(МГУ, БиоФак, 2005)

**Решение.**

Запишем неравенство в виде $f\left(x\right)<0$, где $f\left(x\right)=\sqrt{2-x}+(-x-4)$. Область определения функции $D\left(f\right)=(-\infty ;2]$. $f\left(x\right)$ – сумма двух непрерывных монотонно убывающих функций $y=\sqrt{2-x}$, т.е. убывающая.

Заметим, что $f\left(-2\right)=0$, тогда неравенство $f\left(x\right)<0$ равносильно системе:

$$\left\{\begin{array}{c}x>-2\\x\in D(f)\end{array}\right.⟺-2<x\leq 2$$

**Ответ:** (-2;2].

**Задача 3.**

Решить уравнение:

$\left(2x+1\right)\left(2+\sqrt{(2x+1)^{2}+3}\right)+3x\left(2+\sqrt{9x^{2}+3}\right)=0$(МГУ, ХимФак, 1989)

**Решение.**

Данное уравнение имеет вид:

$f\left(2x+1\right)+f\left(3x\right)=0$, где $f\left(t\right)=t(2+\sqrt{t^{2}+3})$

Функция $f$ определена на всей числовой прямой и является нечетной. При $t>0$ функция $f$ монотонно возрастает, будучи произведением двух монотонно возрастающих функций, принимающих только положительные значения($y=t$ и $y=2+\sqrt{t^{2}+3}$). Ввиду своей нечетности функция $f$ возрастает и при $t<0$.

Пусть для двух чисел $a$ и $b$ выполняется равенство $f\left(a\right)+f\left(b\right)=0$, т.е. $f\left(b\right)=-f(a)$. Поскольку $f\left(-a\right)=-f\left(a\right)$, $f\left(b\right)=f(-a)$, что ввиду монотонности функции $f$ равносильно $b=-a$ или $a+b=0$. Таким образом, задача равносильна уравнению $2x+1+3x=0$, т.е. $x=-\frac{1}{5}$.

**Ответ:** $-\frac{1}{5}$.

**Задача 4.**

Решить уравнение:

 $f\left(\sqrt{x+4}\right)=f(2x)$, где $f\left(t\right)=2t-t^{2}$

**Решение.**

Парабола $y=2t-t^{2}$ симметрична относительно прямой $t=1$, поэтому значения этой функции в точках $t\_{1}$ и $t\_{2}$ могут совпадать в двух случаях: точки $t\_{1}$ и $t\_{2}$совпадают или они симметричны относительно $t=1$.

$$f\left(t\_{1}\right)=f\left(t\_{2}\right)⟺ t\_{1}=t\_{2} или \frac{t\_{1}+t\_{2}}{2}=1$$

Таким образом, имеем 2 случая:

1)$\sqrt{x+4}=2x$

2)$ \sqrt{x+4}=2x+2$

Откуда легко находим (см. задачу 1) корни.

**Ответ:** 0, $\frac{1+\sqrt{65}}{8}$

# **Глава III.**

# **Дополнение**

## **Историческая справка**

**Краткая история развития теории функциональных уравнений.**

Проблема решения функциональных уравнений появилась одновременно с зарождением теории функций. В 1769 году Даламбер свёл обоснование закона сложения сил к решению функционального уравнения. Н. И. Лобачевский получил формулу угла параллельности из функционального уравнения. Также английский математик Ч. Бэббидж рассматривал некоторые геометрические задачи с точки зрения функциональных уравнений. Г. Дарбу применял их к проблеме параллелограмма сил и к основной теореме проективной геометрии.

В современной математике рассматриваются, в основном, дифференциальные уравнения, которые находят широкое применение в физике и технике.

**Краткая биография Коши.**

Огюсте́н Луи́ Коши́ (21 августа 1789— 23 мая 1857) — блестящий французский математик и механик, член Парижской академии наук, Лондонского королевского общества, Петербургской академии наук и других академий.

Основные направления научной деятельности:

1. Математический анализ. О. Л. Коши впервые дал строгое определение основным понятиям математического анализа — пределу, непрерывности, производной, дифференциалу, интегралу, сходимости ряда и т. д. Курсы анализа Коши, основанные на систематическом использовании понятия предела, послужили образцом для большинства курсов позднейшего времени..
2. Алгебра (доказал основную теорему теории симметрических многочленов, развил теорию определителей, найдя все главные их свойства, в частности теорему умножения (причем Коши исходил из понятия знакопеременной функции)).
3. Физика и механика. Внёс значительный вклад в формирование математического аппарата механики сплошных сред. Он первым стал рассматривать условия равновесия и движения выделенного объёма сплошной среды, на который действуют объёмные и поверхностные силы. В 1827 г. Коши установил свойство взаимности напряжений: давления на двух пересекающихся площадках с общим центром и одинаковой площадью обладают тем свойством, что проекция одного из них на нормаль ко второй площадке равна проекции второго давления на нормаль к первой площадке.

О. Л. Коши внес огромный вклад в развитие теории функциональных уравнений. Так, например, широко распространены **уравнения Коши**:

$$f\left(x+y\right)=f\left(x\right)+f\left(y\right) \left(x, y\in R\right)$$

$$f\left(xy\right)=f\left(x\right)+f\left(y\right) \left(x, y\in R\0\right)$$

$$f\left(x+y\right)=f(xy)$$

$$f\left(x+y\right)=f(x)f(y)$$

В области теории дифференциальных уравнений Коши принадлежат: постановка одной из важнейших общих задач теории дифференциальных уравнений (задача Коши), основные теоремы существования решений для случая действительных и комплексных переменных (для последних он развил метод мажорант) и метод интегрирования уравнений с частными производными 1-го порядка (метод Коши - метод характеристических полос).

## **Применение функциональных уравнений в физике.**

Многочисленные задачи, связанные с описанием физических явлений и процессов, приводят к дифференциальным уравнениям в частных производных. Среди таких уравнений наиболее простыми и в то же время наиболее важными являются так называемые линейные дифференциальные уравнения первого и второго порядков в частных производных.

Рассмотрим уравнение $a\frac{du}{dx}+b\frac{du}{dx}=0$, где $u$ – неизвестная функция двух переменных $x$ и $y$; $a$ и $b$ – заданные гладкие функции от $x$, $y$. Оно допускает следующее геометрическое толкование. Пусть в каждой точке $(x;y)$ области $D$ на плоскости $xOy$ задан вектор $\overline{p}$ с координатами $a(x,y)$, $b(x,y)$. Тогда производная искомой функции $u(x,y)$ в направлении векторного поля $\overline{p}$ равна нулю. В частности, линии уровня функции $u$ в каждой точке касаются векторов $\overline{p}=(a;b)$. Таким образом, геометрически уравнение задает векторное поле, векторы которого касаются линий уровня искомой функции $u(x,y)$.

Решение уравнения сводится к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Такой вид имеет, например, уравнений колебаний струны: $\frac{d^{2}u}{dt^{2}}=a^{2}\frac{d^{2}u}{dx^{2}}$, где $u(x,t)$ – функция, описывающая колебания струны.

Также функциональными в физике являются уравнение теплопроводности, уравнение Лапласа и другие. Однако решение этих уравнений уходит в область математического анализа, и описанные в пособии методы там никак не применимы.